



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ
ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

Ministry of
Digital
Governance

Digitally signed by Ministry
of Digital Governance
Date: 2025.09.17
12:59:25 EEST
Reason:
Location: Athens

ΑΔΑ: ΨΨ3Μ46ΝΚΠΔ-ΧΔΔ

Βαθμός Ασφαλείας:
Να διατηρηθεί μέχρι:
Βαθ. Προτεραιότητας:

ΓΕΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΑΤΕΙΑ Π/ΘΜΙΑΣ, Δ/ΘΜΙΑΣ
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ
ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ
Π/ΘΜΙΑΣ ΚΑΙ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΚΑΙ
ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ
ΤΜΗΜΑ Α'

Αθήνα, 17-09-2025
Αρ. Πρωτ. 113927/Δ2

ΠΡΟΣ:

- Περιφερειακές Δ/νσεις Εκπ/σης
- Διευθύνσεις Δ/θμιας Εκπ/σης
- Συμβούλους Εκπ/σης (μέσω των Δ/νσεων Δ/θμιας Εκπ/σης)
- Ημερήσια και Εσπερινά ΓΕ.Λ. (μέσω των Δ/νσεων Δ/θμιας Εκπ/σης)

Ταχ. Δ/ση: Ανδρέα Παπανδρέου 37
Τ.Κ. – Πόλη: 15180 Μαρούσι
Ιστοσελίδα: www.minedu.gov.gr
Πληροφορίες: Θ. Κανελλοπούλου
Μ. Γόγολα
Τηλέφωνο: 210-3443010
210-3442240

ΚΟΙΝ.:

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής
info@iep.edu.gr

ΘΕΜΑ: Οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθημάτων της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας των Α' και Β' τάξεων του Ημερήσιου και του Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2025-2026

Σχετ.: Το με αρ. πρωτ. εισ. Υ.ΠΑΙ.Θ.Α. 104978/ΓΔ4/01-09-2025 έγγραφο

Μετά από σχετική εισήγηση του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (πράξη 47/28-08-2025 του Δ.Σ.), σας διαβιβάζουμε αρχεία με τις οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθημάτων της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας των Α' και Β' τάξεων του Ημερήσιου και του Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2025-2026.

Οι διδάσκοντες/ουσες να ενημερωθούν ενυπόγραφα.

ΜΕ ΕΝΤΟΛΗ ΥΠΟΥΡΓΟΥ
Ο ΓΕΝΙΚΟΣ ΓΡΑΜΜΑΤΕΑΣ Π/ΘΜΙΑΣ,
Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ
ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ

ΙΩΑΝΝΗΣ ΠΑΠΑΔΟΜΑΡΚΑΚΗΣ

Συν.: Τέσσερα (4) ηλεκτρονικά αρχεία

Εσωτ. Διανομή

- Γραφείο Υπουργού
- Γραφείο Γενικού Γραμματέα ΠΕ, ΔΕ & Ειδικής Αγωγής
- Γεν. Δ/ση Σπ. Π/θμιας & Δ/θμιας Εκπ/σης
- Δ/ση Σπουδών, Προγρ/των & Οργάνωσης Δ.Ε., Τμ. Α'
- Δ/ση Παιδείας, Ομογ., Διαπ. Εκπ/σης, Ευρ. και Μειον. Σχολείων
- Διεύθυνση Θρησκευτικής Εκπ/σης & Διαθρ. Σχέσεων
- Δ/ση Ειδικής Αγωγής και Εκπ/σης
- Αυτ. Διεύθυνση Ιδιωτικής Εκπ/σης
- Αυτ. Τμήμα Πρότυπων και Πειραματικών Σχολείων
- Ψηφιακό Φροντιστήριο - Εκπαιδευτικοί

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2025–2026**

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ Τάξης ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ, ΜΟΥΣΙΚΩΝ, ΚΑΛΛΙΤΕΧΝΙΚΩΝ, ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΩΝ ΓΕΛ

Ο κλάδος των Μαθηματικών «Άλγεβρα» της Α΄ Λυκείου περιέχει σημαντικές μαθηματικές έννοιες, όπως, της απόλυτης τιμής, των προόδων, της συνάρτησης κ.ά., οι οποίες είναι σημαντικό μέρος των μαθηματικών γνώσεων που χρειάζεται να έχει ο σύγχρονος πολίτης αλλά και ο/η μαθητής/-ήτρια που θα προσανατολιστεί σε σπουδές που περιέχουν Μαθηματικά. Οι μαθητές/-ήτριες έχουν έρθει σε μια πρώτη επαφή με αυτές τις έννοιες σε προηγούμενες τάξεις. Στην Α΄ Λυκείου θα τις αντιμετωπίσουν σε ένα υψηλότερο επίπεδο αφαίρεσης, το οποίο δημιουργεί ιδιαίτερες δυσκολίες στους/στις μαθητές/-ήτριες. Για την αντιμετώπιση αυτών των δυσκολιών προτείνεται να αφιερωθεί ικανός χρόνος στην εμπέδωση των νέων εννοιών, μέσα από την ανάπτυξη και σύνδεση πολλαπλών αναπαραστάσεων τους και στη χρήση τους στην επίλυση προβλημάτων. Επίσης, να αφιερωθεί χρόνος ώστε οι μαθητές/-ήτριες να εμπλακούν στην αναγνώριση ομοιοτήτων και διαφορών μεταξύ ιδιοτήτων και διαδικασιών καθώς και σε διαδικασίες γενίκευσης. Οι πολλαπλές αναπαραστάσεις (αλγεβρική παράσταση, γράφημα, πίνακας αριθμητικών τιμών, λεκτικές διατυπώσεις) και η σύνδεσή τους μπορούν υποστηριχθούν με ουσιαστικό τρόπο από ψηφιακά περιβάλλοντα. Μέσα από τη διερεύνηση ομοιοτήτων και διαφορών - για παράδειγμα η συσχέτιση των διαδικασιών επίλυσης ή της μορφής των λύσεων εξισώσεων και ανισώσεων, η συσχέτιση ορισμένων ιδιοτήτων των ριζών και των αποδείξεών τους με αντίστοιχες των απολύτων τιμών - οι μαθητές/-ήτριες μπορούν να κατανοήσουν καλύτερα τις σχετικές έννοιες και διαδικασίες.

Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κ.λπ. Οι δραστηριότητες που αναφέρονται ως Δ1, Δ2 κ.λπ. περιέχονται στο ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών (ΠΣ) της Α΄ Λυκείου (ΦΕΚ 162/Β΄/22-1-2015).

Στο πλαίσιο του διδακτικού σχεδιασμού οι εκπαιδευτικοί, προκειμένου να αξιοποιήσουν τις προτεινόμενες **διαδικτυακές πηγές** από το διδακτικό υλικό ή/και τα διδακτικά βιβλία, να προβαίνουν σε επανέλεγχο της εγκυρότητάς τους, διότι ενδέχεται λόγω του δυναμικού τους χαρακτήρα ορισμένες από αυτές να είναι ανενεργές ή να οδηγούν σε διαφορετικό περιεχόμενο.

Εισαγωγικό Κεφάλαιο

(Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες διαπραγματεύονται την έννοια του συνόλου καθώς και σχέσεις και πράξεις μεταξύ συνόλων. Ειδικότερα:

Όσον αφορά στην §Ε.1, αυτή να μη διδαχθεί ως αυτόνομο κεφάλαιο αλλά να συζητηθεί το νόημα και η χρήση των στοιχείων της Λογικής στις ιδιότητες και προτάσεις που διατρέχουν τη διδακτέα ύλη (για παράδειγμα στην ιδιότητα $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$ της §2.1 μπορεί να διερευνηθεί το νόημα της ισοδυναμίας και του συνδέσμου «και»).

§Ε.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες αντιμετωπίζουν για πρώτη φορά με συστηματικό τρόπο την έννοια του συνόλου και των σχέσεων και πράξεων μεταξύ συνόλων. Επειδή η έννοια του συνόλου είναι πρωταρχική, δηλαδή δεν ορίζεται, χρειάζεται να τονιστούν οι προϋποθέσεις που απαιτούνται για να θεωρηθεί μια συλλογή αντικειμένων σύνολο μέσα από κατάλληλα παραδείγματα και αντιπαραδείγματα (π.χ. το σύνολο που αποτελείται από τα θρανία και τους/τις μαθητές/-ήτριες της τάξης, το «σύνολο» των ψηλών μαθητών/-ητριών της τάξης).

Η αναπαράσταση συνόλων, σχέσεων και πράξεων αυτών καθώς και η μετάβαση από τη μία αναπαράσταση στην άλλη, μπορούν να υποστηρίξουν την κατανόηση της έννοιας του συνόλου.

Οι πράξεις μεταξύ συνόλων είναι ένα πλαίσιο στο οποίο οι μαθητές/-ήτριες μπορούν να δώσουν νόημα στους συνδέσμους «ή» και «και». Ειδικά, όσον αφορά στο σύνδεσμο «ή», να επισημανθεί η διαφορετική του σημασία στα Μαθηματικά από εκείνη της αποκλειστικής διάζευξης που του αποδίδεται συνήθως στην καθημερινή χρήση του. Οι δραστηριότητες Δ1, Δ2 του ΠΣ είναι ενδεικτικές για την εννοιολογική προσέγγιση της έννοιας του συνόλου.

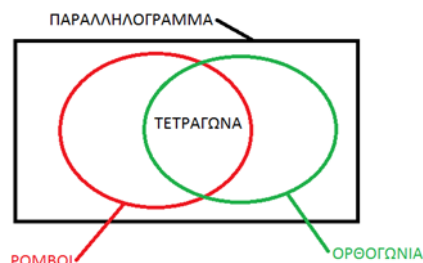
Επισημαίνεται ότι στόχος της διδασκαλίας της συγκεκριμένης ενότητας είναι να υποστηρίξει τις έννοιες και διαδικασίες που συναντώνται σε επόμενες ενότητες (π.χ. στην επίλυση ανισώσεων και στις συναρτήσεις). Επομένως, αναμένεται οι μαθητές/-ήτριες να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν τις έννοιες των συνόλων και των πράξεών τους στο πλαίσιο εννοιών και διαδικασιών των επόμενων κεφαλαίων.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Χρησιμοποιείτε τα διαγράμματα Venn για να αναπαραστήσετε τις σχέσεις μεταξύ παραλληλογράμμων, ορθογωνίων, τετραγώνων και ρόμβων.

[Σχόλιο: Από το διάγραμμα μπορούν οι μαθητές/-ήτριες να διαπιστώσουν ακόμα ότι:

- Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια, ενώ όλα τα ορθογώνια δεν είναι τετράγωνα.
- Όλα τα τετράγωνα είναι ρόμβοι, αλλά όλοι οι ρόμβοι δεν είναι τετράγωνα.
- Όλοι οι ρόμβοι είναι παραλληλόγραμμα, αλλά όλα τα παραλληλόγραμμα δεν είναι ρόμβοι
- . . .



Κεφάλαιο 2°

(Προτείνεται να διατεθούν 21 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του.

Με στόχους την εξομάλυνση της μετάβασης από το Γυμνάσιο στο Λύκειο και τη συμπλήρωση πιθανών κενών προτείνεται να αφιερωθεί χρόνος για την δημιουργία αλγεβρικών παραστάσεων που «μοντελοποιούν» ρεαλιστικές καταστάσεις (τέτοιες ιδέες περιλαμβάνονται στις Δ11, Δ13 του ΠΣ) και για την επανάληψη στοιχείων αλγεβρικού λογισμού (πράξεις πολυωνύμων, παραγοντοποίηση). Ωστόσο, σε μια επανάληψη με αυτούς τους στόχους, θα πρέπει να ληφθεί υπόψη ότι δεν συμπεριλαμβάνεται η εξάσκηση σε πολύπλοκους χειρισμούς και η ενασχόληση με ασκήσεις που η πολυπλοκότητα και δυσκολία τους υπερβαίνει εκείνες των ασκήσεων του σχολικού βιβλίου. Ειδικότερα:

§2.1 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες συναντούν δυσκολίες στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους και γενικότερα στην ταξινόμηση των πραγματικών αριθμών σε φυσικούς, ακέραιους ρητούς και άρρητους. Οι διαφορετικές αναπαραστάσεις των πραγματικών αριθμών επηρεάζουν τις παραπάνω διεργασίες. Για τον λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διάκριση των ρητών από τους άρρητους με χρήση κατάλληλων παραδειγμάτων, όπως οι αριθμοί $\frac{4}{3}$, 1.333..., 1,010101..., 1,1010010001..., καθώς και στην ταξινόμηση αριθμών στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (όπως $\frac{4}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{5}$, $\frac{\pi}{6}$, -1.333 κ.ά.). Παράλληλα, και με αφορμή τα παραπάνω παραδείγματα, μπορεί να γίνει συζήτηση αν το άθροισμα και το γινόμενο δύο ρητών ή δύο άρρητων ή ρητού και άρρητου είναι ρητός ή άρρητος.

Σημαντικό για τον αλγεβρικό λογισμό είναι οι μαθητές/-ήτριες να κατανοήσουν τις ιδιότητες των πράξεων. Σε αυτό θα βοηθήσει η λεκτική διατύπωση και η διερεύνηση των ιδιοτήτων καθώς και η αναγνώριση της σημασίας της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή» και «και», με ιδιαίτερη έμφαση στις ιδιότητες: $\alpha \cdot \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta \neq 0$, $\alpha \cdot \beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$. Η συζήτηση και απόδοση νοήματος στην έννοια της ισοδυναμίας δύο σχέσεων και στη χρήση του αντίστοιχου συμβόλου χρειάζεται να επαναλαμβάνεται εκεί που αυτά εμφανίζονται, διότι, όπως πολλές έννοιες, δεν αναμένεται να κατακτηθεί οριστικά από τους/τις μαθητές/-ήτριες με την πρώτη φορά.

Να δοθεί έμφαση στις μεθόδους απόδειξης και ιδιαίτερα σε αυτές με τις οποίες δεν είναι εξοικειωμένοι οι μαθητές/-ήτριες, όπως η χρήση της απαγωγής σε άτοπο για την απόδειξη ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος και του αντιπαραδείγματος στην απόρριψη του ισχυρισμού: $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow \alpha = \beta$. Η δραστηριότητα Δ6 του ΠΣ μπορεί να αξιοποιηθεί προς αυτή την κατεύθυνση.

§2.2 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες, επηρεασμένοι από τη διαδοχικότητα των ακεραίων, συναντούν δυσκολίες στην κατανόηση της πυκνότητας των ρητών αριθμών. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της έννοιας της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (προτείνεται η δραστηριότητα Δ4 του ΠΣ) καθώς και

στις ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας, με έμφαση στις ισοδυναμίες: $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ και } \beta = 0$, ενώ $\alpha^2 + \beta^2 > 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0 \text{ ή } \beta \neq 0$ και στα σχόλια της παραγράφου.

§2.3 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες έχουν αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, την απόλυτη τιμή ενός αριθμού ως την απόστασή του από το μηδέν στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Στην ενότητα αυτή δίνεται ο τυπικός ορισμός της απόλυτης τιμής και αποδεικνύονται οι βασικές ιδιότητές της. Να αξιοποιηθούν οι αποδείξεις των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών για να συζητηθεί αναλυτικά η μέθοδος απόδειξης (ότι η ζητούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με μία σχέση που γνωρίζουμε ότι είναι αληθής). Επιπλέον, είναι σκόπιμο να συζητηθεί ως εναλλακτική απόδειξη η εξέταση περιπτώσεων. Για παράδειγμα, για την απόδειξη της ιδιότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ να εξεταστούν οι περιπτώσεις i) $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, ii) $\alpha > 0$ και $\beta < 0$, (ή $\alpha < 0$ και $\beta > 0$) και iii) $\alpha < 0$ και $\beta < 0$. Η εξέταση των περιπτώσεων μπορεί να βοηθήσει τους/τις μαθητές/-ήτριες να κατανοήσουν γιατί ισχύει αυτή η ιδιότητα.

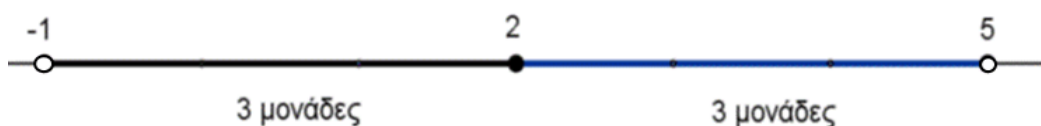
Η γεωμετρική ερμηνεία της απόλυτης τιμής ενός αριθμού και της απόλυτης τιμής της διαφοράς δύο αριθμών είναι σημαντική, γιατί βοηθά τους/τις μαθητές/-ήτριες να αποδώσουν νόημα στην έννοια. Η σύνδεση, όμως, της αλγεβρικής σχέσης και της γεωμετρικής της αναπαράστασης δεν είναι κάτι που γίνεται εύκολα από τους/τις μαθητές/-ήτριες και για αυτό απαιτείται να δοθεί σε αυτό ιδιαίτερη έμφαση.

Με αυτή την έννοια δεν θα διδαχθούν, στη γενική τους μορφή, οι:

$$|x - x_0| < p \Leftrightarrow x \in (x_0 - p, x_0 + p) \Leftrightarrow x_0 - p < x < x_0 + p, \text{ και}$$

$$|x - x_0| > p \Leftrightarrow x \in (-\infty, x_0 - p) \cup (x_0 + p, +\infty) \Leftrightarrow x < x_0 - p \text{ ή } x > x_0 + p$$

επειδή είναι πολύ δύσκολο να γίνουν κατανοητά από τους/τις μαθητές/-ήτριες σ' αυτή τη φάση της αλγεβρικής τους εμπειρίας. Ομοίως, να μη διδαχθεί η έννοια του κέντρου και της ακτίνας διαστήματος. Αντίθετα, οι μαθητές/-ήτριες μπορούν να ασχοληθούν με τα παραπάνω μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα (π.χ. η ανίσωση $|x - 2| < 3$ σημαίνει: «ποιοι είναι οι αριθμοί που απέχουν από το 2 απόσταση μικρότερη του 3;» δηλ. $|x - 2| < 3 \Leftrightarrow d(x, 2) < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 5$).



Προτείνεται, όμως, να γίνει διαπραγμάτευση των σχέσεων $|x| < p \Leftrightarrow -p < x < p$ και $|x| > p \Leftrightarrow x < -p \text{ ή } x > p$. Η δραστηριότητα Δ8 του ΠΣ και το γεωμετρικό μέρος των ασκήσεων 3 και 4 (Β' ομάδας) της σελ. 105 μπορούν να υποστηρίξουν την παραπάνω προσέγγιση.

§2.4 Προτείνεται να διατεθούν 3 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες έχουν ήδη αντιμετωπίσει, στο Γυμνάσιο, τις τετραγωνικές ρίζες και δυνάμεις με ακέραιο εκθέτη καθώς και τις ιδιότητες αυτών. Στην ενότητα αυτή γίνεται επέκταση στη ν-οστή ρίζα και στη δύναμη με ρητό εκθέτη. Να μη διδαχθούν οι ιδιότητες 3 και 4 (δηλαδή οι $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ και $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}$) εφόσον καλύπτονται πλήρως από τη χρήση των δυνάμεων με ρητό εκθέτη και μάλιστα με μικρότερες δυσκολίες χειρισμών.

Να επισημανθεί η διατήρηση των ιδιοτήτων των δυνάμεων με ακέραιο εκθέτη και στην περίπτωση του ρητού εκθέτη. Προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών ασκήσεων, όπως οι 1 έως 6, 9 και 11 της Α' ομάδας του βιβλίου και παρόμοιες. Για να αναδειχθούν τα πλεονεκτήματα των αλγεβρικών μεθόδων έναντι της χρήσης του υπολογιστή τσέπης (εφόσον αυτός διατίθεται), προτείνεται μια δραστηριότητα σαν τη Δ9 του ΠΣ.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Στο ερώτημα ποιον αριθμό εκφράζει η παράσταση $\left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2$ δόθηκαν δυο διαφορετικές απαντήσεις. Να εξετάσετε που βρίσκεται το πρόβλημα.

$$1^{\text{η}} \text{ απάντηση: } \left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = \left[(-2)^{\frac{2 \cdot 1}{4}}\right]^2 = \left[(-2)^{\frac{1}{4}}\right]^2 = \left(4^{\frac{1}{4}}\right)^2 = 4^{\frac{2}{4}} = 4^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$2^{\text{η}} \text{ απάντηση: } \left[(-2)^{\frac{2}{4}}\right]^2 = (-2)^{\frac{2 \cdot 2}{4}} = (-2)^1 = -2$$

Κεφάλαιο 3°

(Προτείνεται να διατεθούν 14 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες μελετούν συστηματικά και διερευνούν εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού. Ως ιδιαίτερη περίπτωση εξετάζεται η εξίσωση $x^n = a$. Ειδικότερα:

§3.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες, έχουν διαπραγματευθεί στο Γυμνάσιο αναλυτικά την επίλυση εξισώσεων της μορφής $ax + b = 0$, της οποίας οι συντελεστές a και b είναι συγκεκριμένοι αριθμοί. Συναντούν δυσκολίες στη μετάβαση από την επίλυση μιας τέτοιας μορφής εξίσωσης στην επίλυση της γενικής μορφής $ax + b = 0$, για δυο κυρίως λόγους: α) η διάκριση μεταξύ των εννοιών του αγνώστου και της παραμέτρου δεν είναι εύκολη και β) η διαδικασία της διερεύνησης γενικά είναι μια νέα διαδικασία για τους/τις μαθητές/-ήτριες.

Για τον λόγο αυτό, προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου σε μια παραμετρική εξίσωση 1ου βαθμού μέσα από τη διαπραγμάτευση της παραμετρικής εξίσωσης που περιλαμβάνεται στο σχόλιο της §3.1. Για παράδειγμα, μπορεί να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες να λύσουν την εξίσωση για συγκεκριμένες τιμές του λ (π.χ. $\lambda = -1$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 5$) και στη συνέχεια να προσπαθήσουν να διατυπώσουν γενικά

συμπεράσματα για κάθε τιμή της παραμέτρου λ . Προτείνεται, επίσης, προς διαπραγμάτευση η παρακάτω ενδεικτική δραστηριότητα καθώς και η επίλυση απλών παραμετρικών εξισώσεων (όπως η άσκηση 3 της Α' Ομάδας).

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Ο τιμοκατάλογος των TAXI στην Αθήνα περιλαμβάνει 1,19€ για την εκκίνηση και 0,68€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, ενώ στα νησιά του Αιγαίου περιλαμβάνει 1,14€ για την εκκίνηση και 0,65€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής.

α) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με TAXI ένας επιβάτης στην Αθήνα, αν διαθέτει 10€.

β) Να βρείτε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με TAXI ένας επιβάτης σε νησί του Αιγαίου, αν διαθέτει 10€.

γ) Αν στους νομούς της Θεσσαλίας η χρέωση για το TAXI περιλαμβάνει 2λ€ για την εκκίνηση και λ€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής, να βρείτε σε σχέση με το λ την απόσταση που μπορεί να διανύσει ένας επιβάτης αν διαθέτει 10 €. Αν στο νομό Λαρίσης η χρέωση ανά χιλιόμετρο διαδρομής είναι 0,60€ και στο νομό Μαγνησίας 0,62€, να υπολογίσετε την απόσταση που μπορεί να διανύσει με TAXI ένας επιβάτης που διαθέτει 10€.

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να συζητηθούν ασκήσεις όπως η 14 της Α' Ομάδας, και να εμπλουτιστούν με εξισώσεις, όπως η $|x - 5| = -3$, την οποία δύσκολα χαρακτηρίζουν οι μαθητές/-ήτριες από την αρχή ως αδύνατη. Τέλος, όσον αφορά τις εξισώσεις που ανάγονται σε πρωτοβάθμιες, προτείνεται η διαπραγμάτευση απλών μόνο εξισώσεων (όπως οι ασκήσεις 9, 10 και 11 της Α' Ομάδας), με στόχο να αναδειχθεί η σύνδεση της παραγοντοποίησης με την επίλυση εξίσωσης.

§3.2 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Η επίλυση εξισώσεων της μορφής $x' = a$ να περιοριστεί σε απλές εξισώσεις.

§3.3 Προτείνεται να διατεθούν 7 ώρες

Η επίλυση της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ στη γενική της μορφή με τη μέθοδο «συμπλήρωσης τετραγώνου» είναι μια διαδικασία που δυσκολεύει τους/τις μαθητές/-ήτριες. Προτείνεται να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές/-ήτριες τη μέθοδο της «συμπλήρωσης τετραγώνου» πρώτα σε εξισώσεις 2ου βαθμού με συντελεστές συγκεκριμένους αριθμούς και στη συνέχεια με τη βοήθεια του/της εκπαιδευτικού να γενικεύσουν τη διαδικασία.

Επίσης, προτείνεται η επίλυση απλών εξισώσεων που ανάγονται σε εξισώσεις 2ου βαθμού (όπως τα παραδείγματα 1 και 3) και να δοθεί έμφαση στη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση εξισώσεων 2ου βαθμού (όπως η δραστηριότητα Δ23 του ΠΣ, καθώς και η ενδεικτική δραστηριότητα 1 που ακολουθεί).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

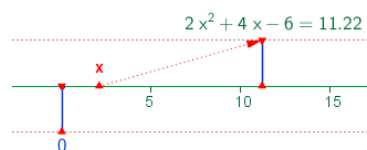
Στο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου μιας χώρας κάθε ομάδα έδωσε με όλες τις υπόλοιπες ομάδες δυο αγώνες (εντός και εκτός έδρας). Αν έγιναν συνολικά 240 αγώνες, πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα;

Οι τύποι του Vieta επιτρέπουν στους/στις μαθητές/-ήτριες είτε να κατασκευάσουν μια εξίσωση 2ου βαθμού με δεδομένο το άθροισμα και το γινόμενο ριζών της είτε να προσδιορίσουν απευθείας τις ρίζες της (βρίσκοντας δυο αριθμούς που να έχουν άθροισμα S και γινόμενο P). Προτείνεται να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες, υπό μορφή άσκησης, να προσδιορίσουν αυτούς τους τύπους και να τους χρησιμοποιήσουν στα παραπάνω. Πέραν των παραπάνω στόχων, η χρήση των τύπων του Vieta σε άλλες ασκήσεις ξεφεύγει από το πνεύμα της διδασκαλίας και δεν προσφέρει στη μαθηματική σκέψη των μαθητών/-τριών.

Η επίλυση ασκήσεων με παραμετρικές εξισώσεις 2ου βαθμού (όπως αρκετές ασκήσεις της Β' Ομάδας) προτείνεται να εστιάζει στην αναγνώριση του ρόλου της παραμέτρου. Για αυτό η προτεραιότητα εδώ θα πρέπει να είναι εννοιολογική και όχι μεθοδολογική, δηλαδή να αναδεικνύει ότι μια εξίσωση με παράμετρο είναι πολλές εξισώσεις οι οποίες μπορεί να μελετηθούν μαζί. Έτσι, προτείνεται να γίνει μια επιλογή **λίγων** ασκήσεων **με μία μόνο παράμετρο** στις οποίες αρχικά οι μαθητές/-ήτριες θα δίνουν τιμές στην παράμετρο και θα παρατηρούν την επίδραση αυτών των τιμών στην εξίσωση. Για παράδειγμα στην άσκηση 4 της Α' Ομάδας θα μπορούσε πρώτα να ζητηθεί η αντικατάσταση του μ με τις τιμές 0, 1 και 2 και να συζητηθεί πόσες λύσεις έχει σε κάθε περίπτωση. Στην ίδια κατεύθυνση θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν ενδεικτικά και οι ασκήσεις 6i και 10 της Β' Ομάδας. Τα ψηφιακά εργαλεία μπορούν να συνεισφέρουν στην εννοιολογική κατανόηση (προτείνεται ενδεικτικά η δραστηριότητα που ακολουθεί). Η εξαντλητική ενασχόληση των μαθητών/-τριών με παραμετρικές εξισώσεις 2ου βαθμού σε ασκήσεις όπως είναι οι ασκήσεις 1, 3, 5i, της Β' Ομάδας οι οποίες εστιάζουν στους αλγεβρικούς χειρισμούς και όχι στον ρόλο της παραμέτρου δεν είναι στο πνεύμα της διδασκαλίας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Το μικροπείραμα «Επίλυση εξισώσεων 2ου βαθμού με τη βοήθεια τύπου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατανόηση της αλγεβρικής και γραφικής προσέγγισης των λύσεων μιας εξίσωσης δευτέρου βαθμού και για επιβεβαίωση των αποτελεσμάτων με τη βοήθεια του τύπου.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2132>

Κεφάλαιο 4^ο

(Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες μελετούν συστηματικά και διερευνούν ανισώσεις 1^ο και 2^ο βαθμού. Ειδικότερα:

§4.1 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες, έχουν διαπραγματευθεί στο Γυμνάσιο αναλυτικά την επίλυση ανισώσεων 1ου βαθμού με συγκεκριμένους συντελεστές. Εκτός από τη χρήση της αριθμογραμμής, για την απεικόνιση του συνόλου λύσεων μιας ανίσωσης, προτείνεται να δοθεί έμφαση και στη χρήση των διαστημάτων των πραγματικών αριθμών, ως εφαρμογή της αντίστοιχης υποπαραγράφου της §2.2. Να συζητηθούν ομοιότητες και διαφορές ανάμεσα στην εξίσωση και την ανίσωση, ως προς τη διαδικασία της επίλυσης τους και το σύνολο των λύσεών τους.

Για καλύτερη κατανόηση και εμπέδωση των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, προτείνεται να λυθούν από τους/τις μαθητές/-ήτριες και ανισώσεις όπως οι $|x - 5| < -3$ και $|x - 5| > -3$, των οποίων τη λύση, αν και προκύπτει από απλή παρατήρηση, δεν την αναγνωρίζουν άμεσα οι μαθητές/-ήτριες. Προτείνεται επίσης να δοθεί προτεραιότητα στη μοντελοποίηση προβλημάτων με χρήση ανισώσεων 1ου βαθμού, όπως για παράδειγμα η άσκηση 11 της Α' Ομάδας και οι ασκήσεις 3 και 4 της Β' Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Η Ειρήνη παρατηρεί ότι κάθε φορά που ο σκύλος της γαβγίζει τη νύχτα ξυπνάει και χάνει 15 λεπτά ύπνου. Το προηγούμενο βράδυ κοιμήθηκε λιγότερο από 5 ώρες, ενώ συνήθως (αν δεν γαβγίσει ο σκύλος) κοιμάται 8 ώρες το βράδυ.

α) Πόσες φορές μπορεί να ξύπνησε το προηγούμενο βράδυ η Ειρήνη;

β) Μπορεί να την ξύπνησε το γάβγισμα 33 φορές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

§4.2 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Η διαπραγμάτευση ανισώσεων 2ου βαθμού γίνεται για πρώτη φορά στην Α' Λυκείου. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση της παραγοντοποίησης του τριωνύμου, όπου γίνεται ξανά χρήση της μεθόδου «συμπλήρωσης τετραγώνου», ώστε να μη δοθούν απευθείας τα συμπεράσματα αυτής. Στον προσδιορισμό του πρόσημου του τριωνύμου, παρατηρείται συχνά οι μαθητές/-ήτριες να παραβλέπουν το πρόσημο του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου ή να συγχέουν το πρόσημο της διακρίνουσας με το πρόσημο του τριωνύμου (π.χ. όταν $\Delta < 0$, θεωρούν ότι και το τριώνυμο παίρνει αρνητικές τιμές).

Τα παραπάνω προβλήματα συχνά αντιμετωπίζονται με διάφορα «τεχνάσματα» και μνημονικούς κανόνες με τα σύμβολα «+» και «-», ώστε να προσδιορίσουν οι μαθητές/-ήτριες το πρόσημο του τριωνύμου και να επιλύσουν ανισώσεις 2ου βαθμού. Τέτοιες προσεγγίσεις δε συνδέονται με την κατανόηση του πότε και γιατί ένα τριώνυμο παίρνει θετικές και πότε αρνητικές τιμές. Για τον λόγο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στην κατανόηση της διαδικασίας προσδιορισμού του πρόσημου του τριωνύμου (π.χ. μέσα από τη μελέτη του προσήμου των παραγόντων του και του συντελεστή του δευτεροβάθμιου όρου, όταν αυτό παραγοντοποιείται) και στη συνέχεια στη χρήση των συμπερασμάτων για την επίλυση ανισώσεων 2ου βαθμού. Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων με χρήση

ανισώσεων 2ου βαθμού (π.χ. η άσκηση 7 της Β' Ομάδας και στοιχεία της δραστηριότητας Δ.14 του ΠΣ και) λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση.

Η διερεύνηση του προσήμου σε παραμετρικές ανισώσεις, η διερεύνηση δευτεροβάθμιας εξίσωσης που οδηγεί σε δευτεροβάθμια ανίσωση και η παραγοντοποίηση τριωνύμου με δύο παραμέτρους δεν περιλαμβάνονται στους στόχους της διδασκαλίας. Έτσι, προτείνεται να μην διαπραγματευθούν οι ασκήσεις 2, 3, 4, 5, 6 και 8 της Β' Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 5x - 6 < 0$.

β) Να βρείτε το πρόσημο των αριθμών $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$ και

$M = (\sqrt{37})^2 - 5\sqrt{37} - 6$ αιτιολογώντας το συλλογισμό σας.

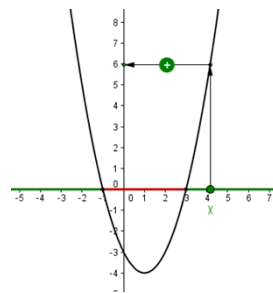
γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$ αιτιολογώντας την απάντησή σας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Ποιοι πραγματικοί αριθμοί είναι μεγαλύτεροι από το τετράγωνό τους; Ποιοι είναι μεγαλύτεροι κατά 1 από το τετράγωνό τους;

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Το μικροπείραμα «Πρόσημο των τιμών του τριωνύμου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, παρά το ότι εμπλέκει τη γραφική παράσταση του τριωνύμου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, ώστε ο/η μαθητής/-τρια να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην εύρεση της περιοχής που πρέπει να κινείται η τιμή της μεταβλητής x , ώστε το τριώνυμο να παίρνει θετική ή αρνητική τιμή. Παράλληλα μαθαίνει για το ρόλο της εικασίας και του πειραματισμού στη διαδικασία της εύρεσης αλγεβρικών σχέσεων.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1752>

Κεφάλαιο 5°

(Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

Στο κεφάλαιο αυτό οι μαθητές/-ήτριες εισάγονται στην έννοια της ακολουθίας πραγματικών αριθμών και μελετούν περιπτώσεις ακολουθιών που εμφανίζουν κάποιες ειδικές μορφές κανονικότητας, την αριθμητική και τη γεωμετρική πρόοδο. Ειδικότερα:

§5.1 Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Το εισαγωγικό παράδειγμα της παραγράφου φέρνει τους/τις μαθητές/-ήτριες σε επαφή με την έννοια της ακολουθίας μέσα από μία κατάσταση της καθημερινής ζωής. Επειδή μέσα από

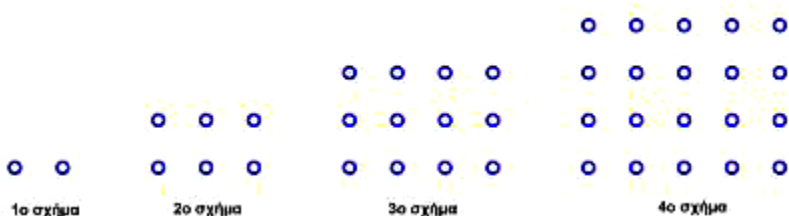
τέτοιες καταστάσεις οι μαθηματικές έννοιες αποκτούν νόημα για τους/τις μαθητές/-ήτριες προτείνεται η διαπραγμάτευση του παραδείγματος στην τάξη.

Προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στην αναγνώριση της ακολουθίας ως αντιστοιχίας των φυσικών στους πραγματικούς αριθμούς και στην εξοικείωση των μαθητών/-τριων με το συμβολισμό που τους/τις δυσκολεύει (π.χ. ότι ο φυσικός αριθμός 1, μέσω μιας ακολουθίας a_n , αντιστοιχεί στον πραγματικό αριθμό a_1 που αποτελεί τον πρώτο όρο της ακολουθίας αυτής). Αυτή η διαδικασία μπορεί να υποστηριχτεί με την αξιοποίηση πινάκων τιμών όπως ο πίνακας του εισαγωγικού παραδείγματος της §5.1.

Επισημαίνεται ότι στόχος της διδασκαλίας της συγκεκριμένης ενότητας είναι να υποστηρίξει τη διδασκαλία των αριθμητικών και γεωμετρικών προόδων και όχι τη συστηματική και βαθύτερη μελέτη των ακολουθιών. Επομένως, αναμένεται οι μαθητές/-ήτριες να είναι σε θέση να χρησιμοποιήσουν την έννοια της ακολουθίας στο πλαίσιο της μελέτης των προόδων.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

i) Ποιον κανόνα
πρέπει να
εφαρμόσουμε
για να
υπολογίσουμε
από πόσα



σημεία θα αποτελείται το 7ο σχήμα ;

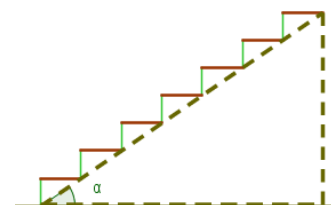
ii) Από πόσα σημεία θα αποτελείται το 27ο σχήμα ;

§5.2 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Αρχικά οι μαθητές/-ήτριες χρειάζεται να μπορούν να αναγνωρίσουν με βάση τον ορισμό αν μια συγκεκριμένη ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος (π.χ. στις ασκήσεις 10 και 12 της Α' Ομάδας). Στη συνέχεια, να προσδιορίζουν το n -οστό όρο με τρόπο τέτοιο που να τους βοηθά να αντιληφθούν κανονικότητες, οι οποίες μπορούν να τους οδηγήσουν σε γενικά συμπεράσματα. Η μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων (όπως οι ασκήσεις 12 της Α' Ομάδας και 9 και 12 της Β' Ομάδας) συμβάλλει στην εννοιολογική κατανόηση της έννοιας της αριθμητικής προόδου.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Ας φτιάξουμε μια σκάλα» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά ώστε ο/η μαθητής/-ήτρια να οδηγηθεί μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην κατανόηση των εννοιών της αριθμητικής προόδου.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5155>

§5.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Η διαπραγμάτευση της έννοιας της γεωμετρικής προόδου προτείνεται να γίνει κατ'αντιστοιχία με την έννοια της αριθμητικής προόδου. Προτείνεται η παρακάτω ενδεικτική δραστηριότητα ώστε να αντιληφθούν οι μαθητές/-ήτριες κανονικότητες που θα τους οδηγήσουν στην εύρεση του νιοστού όρου γεωμετρικής προόδου.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Την ημέρα που η Μαρία γιόρταζε τα 12α γενέθλιά της, η γιαγιά της, της έδωσε 50 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της αύξανε κάθε χρόνο το ποσό του δώρου της κατά 10 ευρώ. Ο παππούς της Μαρίας της έδωσε 5 ευρώ και της είπε ότι μέχρι να γιορτάσει τα 21α γενέθλιά της θα της διπλασίαζε κάθε χρόνο, το προηγούμενο ποσό του δώρου του. Η Μαρία δυσχεράστηκε με την πρόταση του παππού της. Είχε δίκιο; Πόσα χρήματα θα είναι το δώρο της, στα 15α και στα 21α γενέθλια της, από τον παππού της και πόσα από τη γιαγιά της;

Κεφάλαιο 6^ο (Προτείνεται να διατεθούν 11 διδακτικές ώρες)

Οι μαθητές/-ήτριες, στο Γυμνάσιο, έχουν έρθει σε επαφή με την έννοια της συνάρτησης, κυρίως με εμπειρικό τρόπο, και έχουν διερευνήσει στοιχειωδώς συγκεκριμένες συναρτήσεις. Στην Α' Λυκείου μελετούν την έννοια της συνάρτησης με πιο συστηματικό και τυπικό τρόπο. Σε πολλούς/ες μαθητές/-ήτριες δημιουργούνται παρανοήσεις και ελλειπείς εικόνες σχετικά με την έννοια αυτή, με αποτέλεσμα να παρουσιάζουν προβλήματα στην αναγνώριση μιας συνάρτησης, καθώς και να μη μπορούν να χειριστούν με ευελιξία διαφορετικές αναπαραστάσεις της ίδιας συνάρτησης (π.χ. πίνακας τιμών, αλγεβρικός τύπος, γραφική παράσταση). Για τον λόγο αυτό θα πρέπει οι μαθητές/-ήτριες, μέσω κατάλληλων δραστηριοτήτων, να χρησιμοποιούν, να συνδέουν και να ερμηνεύουν τις αναπαραστάσεις μιας συνάρτησης καθώς και να εντοπίζουν τα πλεονεκτήματα καθεμιάς εξ αυτών. Η μονόπλευρη χρήση των συναρτήσεων ως αφορμή για εξάσκηση αλγεβρικών δεξιοτήτων, όπως η εξαντλητική ενασχόληση των μαθητών/-τριών με επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων για την εύρεση του πεδίου ορισμού, δεν βοηθά στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης και δεν είναι στο πνεύμα της διδασκαλίας.

Ειδικότερα:

§6.1 - §6.2 Προτείνεται να διατεθούν 7 ώρες

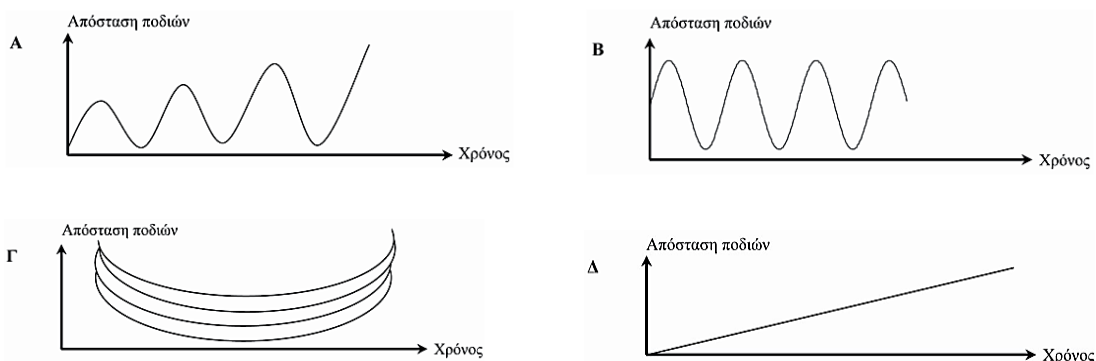
Προτείνεται να δοθούν αρχικά συγκεκριμένα παραδείγματα μοντελοποίησης καταστάσεων (πχ. οι δραστηριότητες Δ.13, Δ.15 του ΠΣ), ώστε να αναδειχθεί η σημασία της έννοιας της συνάρτησης για τις εφαρμογές, και στη συνέχεια να ακολουθήσει ο τυπικός ορισμός. Να δοθεί έμφαση στην αναγνώριση και τεκμηρίωση, με βάση τον ορισμό, αν αντιστοιχίες που δίνονται με διάφορες αναπαραστάσεις είναι συναρτήσεις ή όχι (οι δραστηριότητες Δ12 και Δ16 του ΠΣ λειτουργούν προς αυτήν την κατεύθυνση) και στον προσδιορισμό της

ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής. Η σύνδεση διαφορετικών αναπαραστάσεων μιας συνάρτησης (τύπος, πίνακας τιμών και γραφική παράσταση) μπορεί να υποστηρίξει την κατανόηση των εννοιών. Η ερμηνεία μιας δεδομένης γραφικής παράστασης για την επίλυση ενός προβλήματος, η γραφική επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων (για παράδειγμα, όταν δίνονται μόνο τα γραφήματα) και η γεωμετρική ερμηνεία αλγεβρικών συμπερασμάτων (όπως, για παράδειγμα, η γεωμετρική ερμηνεία της ύπαρξης ή μη λύσεων μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης) μπορούν να συμβάλλουν στη νοηματοδότηση εννοιών και διαδικασιών.

Η συζήτηση της «Απόστασης σημείων» αναδεικνύει τη χρήση του Πυθαγορείου θεωρήματος και μπορεί να βοηθήσει στην κατανόηση πλευρών του συστήματος συντεταγμένων (σύνδεση του μήκους τμήματος με τις συντεταγμένες σημείου). Ωστόσο, η εξάσκηση των μαθητών/-τριών σε πράξεις και αλγεβρικούς υπολογισμούς με αφορμή τον τύπο της απόστασης δεν υποστηρίζει αυτή την κατανόηση και προτείνεται η αποφυγή της. Επισημαίνεται ότι δεν θα διδαχτεί η εφαρμογή της σελίδας 155 (εξίσωση κύκλου).

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Ο Μιχάλης κάθεται πάνω σε μια κούνια. Αρχίζει να κάνει κούνια προσπαθώντας να φτάσει όσο το δυνατόν πιο ψηλά. Ποιο από τα παρακάτω διαγράμματα αναπαριστά καλύτερα την απόσταση των ποδιών του από το έδαφος, καθώς κάνει κούνια;



Πηγή: Θέμα «Κούνια», PISA 2003

<https://pisa.iep.edu.gr/index.php/examples/themata-mathimatikon>

§6.3 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες έχουν διαπραγματευθεί τη γραφική παράσταση της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ στο Γυμνάσιο. Εδώ προτείνεται να δοθεί έμφαση στη διερεύνηση του ρόλου των παραμέτρων α και β στη γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x + \beta$, ώστε να προκύψουν οι σχετικές θέσεις ευθειών στο επίπεδο (πότε είναι παράλληλες μεταξύ τους, πότε ταυτίζονται, πότε τέμνουν τον άξονα γ'γ στο ίδιο σημείο).

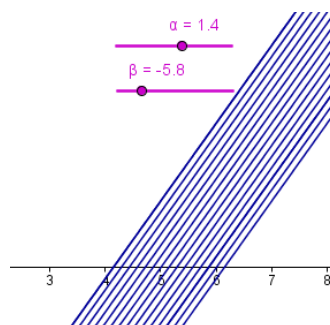
Επίσης προτείνεται, αφού οι μαθητές/-ήτριες παρατηρήσουν (με χρήση της γραφικής παράστασης και του πίνακα τιμών συγκεκριμένων συναρτήσεων) πώς μεταβάλλονται οι τιμές της συνάρτησης όταν μεταβάλλεται η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής, να διερευνήσουν το ρόλο των παραμέτρων α και β (προτείνεται η δραστηριότητα Δ17 του ΠΣ).

Η κλίση ευθείας ως λόγος μεταβολής βοηθά τους/τις μαθητές/-ήτριες να συνδέσουν τον συντελεστή διεύθυνσης με τη συγκεκριμένη γωνία ω (όπως στο τρίγωνο AKB του σχήματος που περιλαμβάνεται στη θεωρία αυτής της παραγράφου).

Προτείνονται οι δραστηριότητες Δ18 και Δ19 του ΠΣ.

1^η Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Ο ρόλος των συντελεστών στην $y = \alpha x + \beta$ » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, μπορεί να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά, για την εισαγωγή στη συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ μέσω της διερεύνησης του ρόλου κάθε συντελεστή στο σχηματισμό της ευθείας $y = \alpha x + \beta$ και ερμηνείας της σχέσης των μελών της κάθε μιας από τις δυο οικογένειες ευθειών, για α σταθερό και β μεταβαλλόμενο και αντίστροφα.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/1774>

2^η Ενδεικτική δραστηριότητα:

Στο διάγραμμα φαίνεται ο συνολικός αριθμός των πωλήσεων DVD στο Ηνωμένο Βασίλειο σε ετήσια βάση από το 2008 έως το 2014. Οι τιμές στον οριζόντιο άξονα αναφέρονται στον αριθμό των ετών **μετά** το 2008.



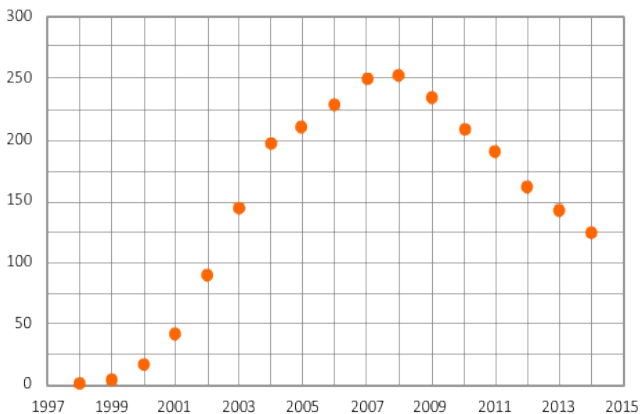
Στο διάγραμμα μπορείς να δεις τις συντεταγμένες των σημείων. Για παράδειγμα, το σημείο (0, 252.9) δείχνει ότι πουλήθηκαν 252.9 εκατομμύρια DVD το 2008. Το σημείο (1, 234.6) δείχνει ότι πουλήθηκαν 234.6 εκατομμύρια DVD κατά το έτος 2009, κ.λπ. Στο διάγραμμα προστέθηκε μια ευθεία γραμμή, για να μοντελοποιήσει αυτά τα σημεία δεδομένων.

Ερώτηση 1: Ισχύουν οι προτάσεις στον παρακάτω πίνακα με βάση τις πληροφορίες που φαίνονται στο διάγραμμα; Κάνε κλικ στο Ναι ή στο Όχι για κάθε πρόταση.

Πρόταση	Ναι	Όχι
Ο αριθμός των πωλήσεων DVD μειώθηκε περίπου κατά 50% από το 2008 έως το 2014.	☐	☐
Ο αριθμός των πωλήσεων DVD μειωνόταν κάθε χρόνο κατά την ίδια ποσότητα από το 2008 έως το 2014.	☐	☐
Η κλίση της ευθείας αναπαριστά τη μέση ετήσια μείωση των πωλήσεων DVD από το 2008 έως το 2014.	☐	☐

Ερώτηση 2: Η εξίσωση της ευθείας είναι $d = 254 - 22n$, όπου το d είναι ο αριθμός των πωλήσεων DVD (σε εκατομμύρια) και το n είναι ο αριθμός των ετών μετά το 2008. Αν αυτή η τάση των πωλήσεων συνεχιστεί, σε ποιο έτος ο αριθμός των πωλήσεων DVD θα είναι χαμηλότερος από 1 εκατομμύριο σύμφωνα με το μαθηματικό μοντέλο;

Ερώτηση 3: Στο διάγραμμα φαίνεται ο συνολικός αριθμός των πωλήσεων DVD στο Ηνωμένο Βασίλειο σε ετήσια βάση από το 1998 έως το 2014. Από το 1998, υπήρξαν πολλές αλλαγές στις τάσεις που ακολούθησε ο αριθμός των πωλήσεων DVD. Ποιες είναι οι τάσεις των πωλήσεων (αυξητική ή πτωτική) και τα μαθηματικά μοντέλα (γραμμικό ή μη γραμμικό) που ανταποκρίνονται **καλύτερα** στα δεδομένα των περιόδων 1998-2004 και 2005-2007;



Να συμπληρώσεις τον πίνακα. Η τελευταία γραμμή έχει συμπληρωθεί για σένα ως παράδειγμα

Έτη	Τάση των πωλήσεων	Μαθηματικό Μοντέλο
1998-2004		
2005-2007		
2008-2014	Πτωτική	Γραμμικό

Πηγή: Θέμα «Πωλήσεις DVD», PISA 2022

<https://pisa2022-questions.oecd.org/platform/index.html?user=&unit=MAT/MA106-DVDSales&lang=ell-GRC>

3^η Ενδεικτική δραστηριότητα:

Για λόγους υγείας, οι άνθρωποι θα πρέπει να περιορίζουν τις δυνάμεις τους, για παράδειγμα κατά τη διάρκεια της άθλησης, ώστε να μην υπερβούν μία συγκεκριμένη συχνότητα καρδιακών παλμών. Για χρόνια, η σχέση ανάμεσα στην προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών ενός ατόμου και στην ηλικία του, περιγράφονταν με τον παρακάτω τύπο:

Προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών = $220 - \text{ηλικία}$.

Πρόσφατες έρευνες έδειξαν ότι ο τύπος αυτός θα έπρεπε να τροποποιηθεί λίγο. Ο καινούργιος τύπος είναι ο ακόλουθος:

Προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών = $208 - (0,7 \times \text{ηλικία})$.

Ερώτηση 1: Ένα άρθρο εφημερίδας αναφέρει: «Λόγω της χρήσης του νέου τύπου αντί του παλιού, ο μέγιστος αριθμός που προτείνεται για τους καρδιακούς παλμούς ανά λεπτό, μειώνεται λίγο για τους νέους ανθρώπους και αυξάνεται λίγο για τους ηλικιωμένους». Από ποια ηλικία και μετά αυξάνεται η προτεινόμενη μέγιστη

συχνότητα καρδιακών παλμών λόγω ρήσης του νέου τύπου; Να γράψετε τον τρόπο σκέψης σας.

Ερώτηση 2: Ο τύπος *Προτεινόμενη μέγιστη συχνότητα καρδιακών παλμών* $= 208 - (0,7 \times \text{ηλικία})$ χρησιμοποιείται επίσης, για να εκτιμήσει πότε η σωματική άσκηση είναι πιο αποτελεσματική. Έρευνες έχουν δείξει ότι η σωματική άσκηση είναι πιο αποτελεσματική, όταν οι καρδιακοί παλμοί φθάνουν στο 80% της προτεινόμενης μέγιστης συχνότητας. Να γράψεις έναν τύπο που θα υπολογίζει τη συχνότητα καρδιακών παλμών, ως συνάρτηση της ηλικίας, για να είναι η σωματική άσκηση πιο αποτελεσματική.

Πηγή: Θέμα «Καρδιακοί παλμοί», PISA 2003

<https://pisa.iep.edu.gr/index.php/examples/themata-mathimatikon>

ΑΛΓΕΒΡΑ Α΄ Τάξης ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΛ

Η διαχείριση της ύλης είναι αυτή που προτείνεται για την Α΄ τάξη Ημερησίου ΓΕΛ με την ακόλουθη διαφοροποίηση ως προς τις ώρες διδασκαλίας ανά κεφάλαιο.

Εισαγωγικό Κεφάλαιο §Ε.2

(Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα)

Κεφάλαιο 2^ο

(Προτείνεται να διατεθούν 13 διδακτικές ώρες)

Κεφάλαιο 3^ο

(Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

Κεφάλαιο 4^ο

(Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Κεφάλαιο 5^ο

(Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες)

Κεφάλαιο 6^ο

(Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

Για την προσαρμογή της διδασκαλίας στον διατιθέμενο χρόνο, προτείνεται να δίνεται έμφαση στα βασικά παραδείγματα - εφαρμογές και στην ανάδειξη, μέσω αυτών, του περιεχομένου (εννοιών και μεθόδων) της κάθε παραγράφου.

ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗΣ

Η εγκατάσταση των Διαδραστικών Συστημάτων Μάθησης στα σχολεία προσφέρει πολυάριθμα πλεονεκτήματα στο σχεδιασμό και στην ανάπτυξη της διδασκαλίας. Συγκεκριμένα:

- Παρέχεται η δυνατότητα οργάνωσης, καταγραφής και αποθήκευσης μαθημάτων που δύνανται να αξιοποιηθούν τόσο από τους/τις εκπαιδευτικούς όσο κι από τους/τις μαθητές/-τριες, δημιουργώντας ένα «υβριδικό περιβάλλον εργασίας», που λειτουργεί ως διδακτικό αποθετήριο και εμπλουτίζεται στο πλαίσιο της σύγχρονης και ασύγχρονης διδασκαλίας.
- Προσφέρεται η εύκολη πρόσβαση στο note, στα σχεδιαστικά εργαλεία των οθονών αφής, σε ποικίλους Ανοικτούς Εκπαιδευτικούς Πόρους / Open Educational Resources (ΑΕΠ / ΟΕΡ) που περιλαμβάνουν κατηγορίες όπως: Εκπαιδευτικά Παιχνίδια/Δυναμικός Χάρτης/Εφαρμογές Λογισμικού/AR-VR-MR Αντικείμενα /3D Αντικείμενα κ.ά. καθώς και στην εφαρμογή mozaBook (που είναι προεγκατεστημένη στο περιβάλλον windows των οθονών και μελλοντικά θα εμπλουτιστεί με τα διαδραστικά σχολικά βιβλία).
- Οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να προσαρμόσουν το υλικό διδασκαλίας τους ώστε να ανταποκρίνεται στη γνωστική ετοιμότητα και στις ανάγκες των μαθητών/-τριών, σε σχέση με την ηλικία τους και τους διαφορετικούς τύπους μάθησης (οπτικός, ακουστικός, κιναισθητικός), προσφέροντας υλικό σε διαφορετικές μορφές, με άξονα τη συμπερίληψη όλων καθώς και την εξατομικευμένη μάθηση. Παράλληλα, η χρήση ποικίλων διαδραστικών δραστηριοτήτων επιτρέπουν την άμεση ανατροφοδότηση και αξιολόγηση του επιπέδου κατανόησης του μαθήματος.
- Η λειτουργία «πολλαπλής αφής» των διαδραστικών οθονών δίνει στον/στην εκπαιδευτικό την ευκαιρία να σχεδιάσει και να ενσωματώσει στη διδασκαλία ομαδικές δραστηριότητες, που επιτρέπουν τη συνέργεια των μαθητών/-τριών, καλλιεργώντας δεξιότητες όπως της συνεργασίας και επικοινωνίας.
- Οι οθόνες αφής μπορούν να συνδεθούν με το Google Drive ή το OneDrive, με υπολογιστές, τάμπλετ και άλλες συσκευές, διευκολύνοντας τη μεταφορά και την κοινή χρήση πληροφοριών.
- Δίνεται η δυνατότητα της αντεστραμμένης διδασκαλίας και η λειτουργία της ανεστραμμένης τάξης.
- Δίνεται η δυνατότητα ένταξης της τεχνητής νοημοσύνης (TN) στη μαθησιακή διαδικασία.
- Διευκολύνεται η χρήση δυναμικών λογισμικών Μαθηματικών, εργαλείων γεωμετρικών κατασκευών, διαδραστικών ασκήσεων, βίντεο-ηχητικών, τρισδιάστατων μοντέλων, εγείροντας το ενδιαφέρον των μαθητών/-τριών και προάγοντας την αφομοίωση της ύλης.
- Τέλος, τα διαδραστικά συστήματα μάθησης υποστηρίζουν και επιταχύνουν τη διενέργεια του μαθήματος καθώς δεν απαιτούν συσκότιση της αίθουσας για να προβληθεί υλικό, έχουν ενσωματωμένα ηχεία και μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαισθητικά με την αφή. Το υλικό των Οδηγιών Διδασκαλίας είναι κατάλληλο για χρήση δια μέσου των διαδραστικών συστημάτων μάθησης. Επιπροσθέτως, τα συστήματα αυτά διαθέτουν την επιλογή της λειτουργίας τους ως ασπρόπινακες με πολλές επιπλέον δυνατότητες πέραν της απλής γραφής κειμένου (π.χ. λειτουργία screenshot της οθόνης και δυνατότητα γραφής σημειώσεων πάνω στο screenshot, αντιγραφή-επικόλληση μέρους των σημειώσεων κ.ά.).
- Το σύνολο των δυνατοτήτων του υλικού κάθε μοντέλου διαδραστικού συστήματος μάθησης μπορεί να αναζητηθεί στις εξής διευθύνσεις:

[Συχνές ερωτήσεις](#) Διαδραστικών Συστημάτων.

[Χρήσιμα αρχεία](#) Διαδραστικών Συστημάτων.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2025–2026

Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κ.λπ.

Στο πλαίσιο του διδακτικού σχεδιασμού οι εκπαιδευτικοί, προκειμένου να αξιοποιήσουν τις προτεινόμενες **διαδικτυακές πηγές** από το διδακτικό υλικό ή/και τα διδακτικά βιβλία, να προβαίνουν σε επανέλεγχο της εγκυρότητάς τους, διότι ενδέχεται λόγω του δυναμικού τους χαρακτήρα ορισμένες από αυτές να είναι ανενεργές ή να οδηγούν σε διαφορετικό περιεχόμενο.

Κεφάλαιο 1ο

(Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

§1.1. Προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες

Από το Γυμνάσιο είναι γνωστή η έννοια των γραμμικών συστημάτων 2×2 , η γραφική επίλυσή τους και η αλγεβρική επίλυση με τη μέθοδο της αντικατάστασης και τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών. Εδώ προτείνεται να γίνει μια επανάληψη εστιάζοντας στη σύνδεση της αλγεβρικής λύσης του συστήματος με το γεωμετρικό της νόημα και στην επίλυση προβλημάτων. Η γεωμετρική έκφραση του συστήματος και της λύσης του μπορεί να συνδεθεί με την ευθεία ως συνάρτηση και τον συντελεστή διεύθυνσής της. Για παράδειγμα, οι ασκήσεις 5 και 6 της Α' Ομάδας μπορούν να τροποποιηθούν ώστε το ζητούμενο να είναι α) ο συντελεστής διεύθυνσης των ευθειών που περιγράφουν αυτές οι εξισώσεις, β) η σχετική θέση αυτών των ευθειών, και γ) το πλήθος λύσεων του συστήματος.

Κεφάλαιο 2ο (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

§2.1 και 2.2 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες)

Αρχικά, οι μαθητές/-τριες χρησιμοποιούν πίνακες τιμών και λογισμικό για να κάνουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = ax^2$ και χρησιμοποιούν τις μετατοπίσεις για να μελετήσουν την $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$. Σε αυτή τη μελέτη εξετάζουν τη μονοτονία, τα ακρότατα και τις συμμετρίες αυτών των συναρτήσεων. Διατυπώνονται οι γενικοί ορισμοί των παραπάνω εννοιών και εξετάζονται αυτές οι έννοιες και για άλλες συναρτήσεις μέσω των γραφικών παραστάσεών τους. Η έμφαση πρέπει να δοθεί στη γεωμετρική ερμηνεία των εννοιών της μονοτονίας, των ακροτάτων και της άρτιας – περιττής και στη σύνδεση της γεωμετρικής ερμηνείας με την αλγεβρική έκφραση.

Ενδεικτικά, ασκήσεις που προτείνονται επειδή υποστηρίζουν τα παραπάνω είναι:

- Από την §2.1 οι 1, 2, 4, 6, 7, 8.
- Από την §2.2 οι 1, 2, 5.

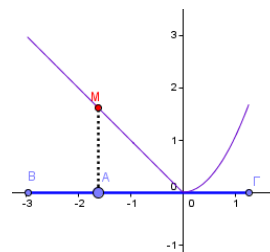
Σημειώνεται ότι η διδασκαλία των ιδιοτήτων των συναρτήσεων (μονοτονία, ακρότατα, συμμετρίες), σε αυτή την τάξη, εστιάζει στην κατανόηση των εννοιών σε άμεση σύνδεση με την

εικόνα των γραφημάτων και όχι στην ευελιξία των μαθητών/-ητριών στις αλγεβρικές μεθόδους μελέτης των ιδιοτήτων.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Το μικροπείραμα «Συμμεταβολή σημείων - Μονοτονία - Ακρότατα συνάρτησης» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, προτείνεται για την εισαγωγή στην έννοια της συνάρτησης ως συμμεταβολή σημείων και διερεύνηση των ιδιοτήτων της συμμεταβολής των δύο σημείων, της μονοτονίας και των ακροτάτων.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5226>



Κεφάλαιο 3ο

(Προτείνεται να διατεθούν 22 διδακτικές ώρες)

§3.1 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Οι μαθητές/-ήτριες στο Γυμνάσιο έχουν συναντήσει και ασχοληθεί με τους τριγωνομετρικούς αριθμούς οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου και αμβλείας γωνίας. Το καινούργιο εδώ είναι η εισαγωγή του τριγωνομετρικού κύκλου για τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών. Επειδή στον τριγωνομετρικό κύκλο στηρίζονται όλες οι έννοιες και οι ιδιότητες που μελετώνται στη συνέχεια, έμφαση πρέπει να δοθεί στην κατανόησή του που θα επιτρέψει τη συνεχή χρήση του αντί για την απομνημόνευση τύπων (πχ. για την αναγωγή στο πρώτο τεταρτημόριο). Επίσης, να δοθεί έμφαση στην έννοια του ακτινίου, στη σύνδεσή του με τις μοίρες και την αναπαράστασή του στον τριγωνομετρικό κύκλο καθώς και στην «κατάληξη» της τελικής πλευράς μιας γωνίας πάνω σε αυτόν.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Δίνεται γωνία, με $0^\circ \leq \omega < 360^\circ$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\eta\mu\omega = -\frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$. Να

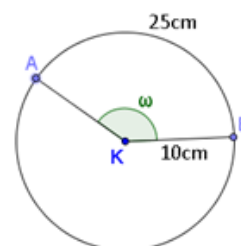
σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $0^\circ \leq \varphi < 360^\circ$, που ικανοποιούν τη σχέση $\eta\mu\varphi = -\frac{1}{2}$ και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Δίνεται ο κύκλος του σχήματος με κέντρο K και ακτίνα 10cm. Επίσης δίνεται το τόξο AB με μήκος 25 cm και αντίστοιχη επίκεντρη γωνία ω .

α) Να βρείτε το μέτρο της ω σε rad.

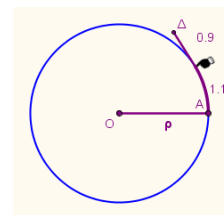


β) Να δικαιολογήσετε ότι το συνημίτονο της γωνίας ω είναι αρνητικό.

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Το μικροπείραμα «Τι είναι το ακτίνιο;» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, προτείνεται για την κατανόηση της έννοιας του ακτινίου και τη σύνδεση μεταξύ της μέτρησης γωνιών σε μοίρες και ακτινίων στον τριγωνομετρικό κύκλο.

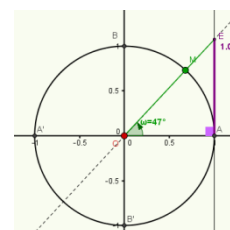
<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5272>



Ενδεικτική δραστηριότητα 4:

Με το μικροπείραμα «Ο τριγωνομετρικός κύκλος» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές/-τριες εισάγονται στον ορισμό του τριγωνομετρικού κύκλου και των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5140>



§3.2 Προτείνεται να διατεθούν 3 ώρες

Ο στόχος της παραγράφου είναι η κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των τριγωνομετρικών αριθμών και για αυτό οι μαθητές/-ήτριες θα πρέπει να εμπλακούν με απλές ασκήσεις υπολογισμού των τριγωνομετρικών αριθμών όταν είναι γνωστός ο ένας και με απλές αποδείξεις σχέσεων. Για τον σκοπό αυτό προτείνεται να γίνει επιλογή από τις ασκήσεις 1-6 και από τις 10 – 11 της Α' Ομάδας. Ασκήσεις απόδειξης σχέσεων που είναι περισσότερο απαιτητικές από τις προτεινόμενες δεν συμβάλλουν στην επίτευξη των στόχων του μαθήματος.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

α) Υπάρχει γωνία θ με $\eta\mu\theta = \frac{1}{4}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{3}{4}$;

β) Υπάρχει γωνία θ με $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = -\frac{4}{5}$;

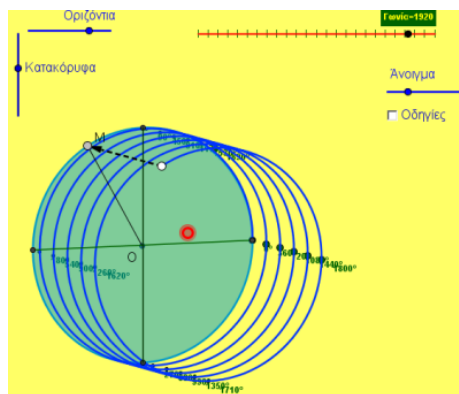
Αν όχι, αιτιολογήστε την απάντησή σας. Αν ναι, να σχεδιάσετε μια τέτοια γωνία πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. Πόσες τέτοιες γωνίες μεταξύ 0° και 360° υπάρχουν;

§3.3 Προτείνεται να διατεθούν 3 ώρες

Η ανάδειξη του τριγωνομετρικού κύκλου ως βασικό εργαλείο αναγωγής στο πρώτο τεταρτημόριο μπορεί να αντικαταστήσει την απομνημόνευση τύπων και την αναπαραγωγή κανόνων χωρίς νόημα. Αυτό μπορεί να γίνει αν ενθαρρυνθούν οι μαθητές/-ήτριες να χρησιμοποιούν τις συμμετρίες σε νοητό τριγωνομετρικό κύκλο. Προτείνεται να μη δοθούν προς λύση οι ασκήσεις της Β' Ομάδας. Οι ερωτήσεις κατανόησης I και II μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να συζητηθούν και να διευκρινιστούν πτυχές των προηγούμενων ενοτήτων της τριγωνομετρίας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Με το μικροπείραμα «Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνιών που ανάγονται στο 2ο τεταρτημόριο» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές/-ήτριες βρίσκουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνιών που ανάγονται στο δεύτερο τεταρτημόριο.



Με τη βοήθεια του λογισμικού μέσω πολλαπλών δυναμικά αλληλοσυνδεόμενων γεωμετρικών αναπαραστάσεων, οι μαθητές/-ήτριες βρίσκουν με τη βοήθεια δρομέα μια συγκεκριμένη γωνία μεγαλύτερη των 360° και βλέπουν την γεωμετρική της αναπαράσταση πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο. Στη συνέχεια, μπορούν να δουν το τόξο της γωνίας αυτής στον χώρο, βρίσκουν την προβολή του στον πρώτο κύκλο και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας αυτής, αφού την αναγάγουν σε γωνία του πρώτου τεταρτημορίου. Τέλος, εφαρμόζουν τη στρατηγική αυτή και σε άλλες γωνίες.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5275>

§3.4 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Η έννοια της περιοδικότητας, που συνδέεται άμεσα με φαινόμενα της καθημερινής ζωής, είναι μια από τις σημαντικότερες έννοιες που θα διδαχθούν οι μαθητές/-ήτριες στη Β' Λυκείου. Θα πρέπει λοιπόν να δοθεί έμφαση σε αυτή την ιδιότητα μέσα από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις γραφικές τους παραστάσεις σε συνδυασμό με προβλήματα. Η χάραξη των γραφικών παραστάσεων των τριγωνομετρικών συναρτήσεων προτείνεται να στηριχτεί στον τριγωνομετρικό κύκλο.

Πρέπει να επισημανθεί ότι η ανεξάρτητη μεταβλητή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων εκφράζει τόξο μετρημένο σε ακτίνια και όχι σε μοίρες. Επίσης, ότι στον τριγωνομετρικό κύκλο το μέτρο του τόξου σε ακτίνια ταυτίζεται αριθμητικά με το μήκος του και ότι έτσι, «τυλίγουμε» την ευθεία των πραγματικών αριθμών στον τριγωνομετρικό κύκλο, με αποτέλεσμα κάθε πραγματικός αριθμός να αντιστοιχεί σε ένα σημείο του κύκλου και κάθε σημείο του κύκλου να αντιστοιχεί σε άπειρους πραγματικούς αριθμούς.

Αφού συζητηθούν τα παραδείγματα του σχολικού βιβλίου, προτείνεται να τονιστούν τα συμπεράσματα που περιέχονται στο Σχόλιο της σελίδας 81.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Μία ρόδα ακτίνας 1 περιστρέφεται με φορά αντίθετη από αυτήν των δεικτών του ρολογιού έτσι ώστε, κάθε σημείο της περιφέρειάς της, να διαγράφει σε ένα δευτερόλεπτο τόξο ενός ακτινίου. Τοποθετούμε τη ρόδα σε ένα σύστημα αξόνων με αρχή στο κέντρο της O και θεωρούμε ένα σημείο της P , το οποίο τη χρονική στιγμή 0 βρίσκεται στο σημείο $(1,0)$.

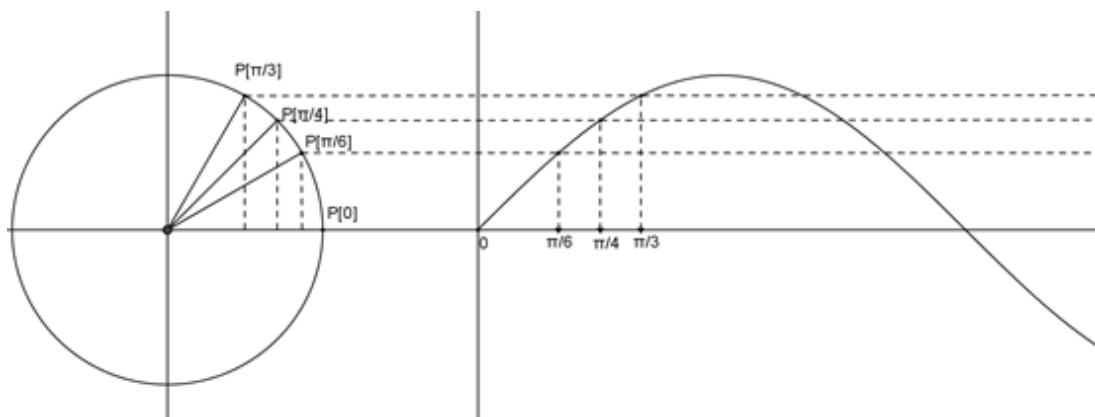
α) Να εξηγήσετε γιατί, το ύψος του σημείου P σε σχέση με τον άξονα $x'x$ κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), $t \geq 0$ δίνεται από τη συνάρτηση $f(t) = \eta \mu t$, $t \geq 0$

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(t)$ στο διάστημα $[0, 4\pi]$.

γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές t με $0 \leq t \leq 4\pi$ κατά τις οποίες το σημείο P βρίσκεται στο μεγαλύτερο και στο μικρότερο δυνατό ύψος.

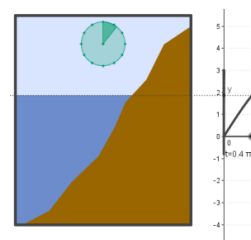
δ) Να προσδιορίσετε τα χρονικά διαστήματα μεταξύ 0 και 4π sec κατά τα οποία το ύψος του σημείου P είναι μεγαλύτερο του $0,5$.

ε) Θεωρούμε τώρα το σημείο K της ρόδας, το οποίο τη χρονική στιγμή 0 βρίσκεται στη θέση $(0,1)$. Να δείξετε ότι το ύψος του σημείου K κάθε χρονική στιγμή t sec δίνεται από τη συνάρτηση $g(t) = \sigma \nu \eta t$, $t \geq 0$.



Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

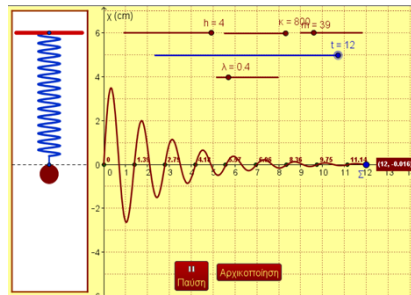
Με το μικροπείραμα «Περιοδικά φαινόμενα: Η παλίνρροια» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία (άσκηση 2, Β' ομάδας), οι μαθητές/-ήτριες χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους, εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με την έννοια των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Επίσης μελετούν το φαινόμενο της παλίνρροιας και αναζητούν απαντήσεις, με ερευνητικό και βιωματικό τρόπο, γεγονός που προσφέρει το διερευνητικό περιβάλλον του Geogebra.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5165>

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Με το μικροπείραμα «Περιοδικές συναρτήσεις - Το ελατήριο» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές/-ήτριες χρησιμοποιώντας τις γνώσεις τους, εμπλέκονται ενεργά και εξοικειώνονται με την έννοια των περιοδικών συναρτήσεων. Επίσης, πειραματίζονται με ένα ελατήριο και αναζητούν απαντήσεις με ερευνητικό και βιωματικό τρόπο, γεγονός που προσφέρει το διερευνητικό περιβάλλον του Geogebra.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5208>

§3.5 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Οι τριγωνομετρικές εξισώσεις είναι ένα σημαντικό αλγεβρικό εργαλείο και είναι το πρώτο είδος μη πολυωνυμικών εξισώσεων που συναντούν οι μαθητές/-ήτριες. Προτείνεται να δοθεί έμφαση στην ερμηνεία των τύπων λύσεων τόσο μέσω του τριγωνομετρικού κύκλου, όσο και μέσω των γραφικών παραστάσεων των αντίστοιχων συναρτήσεων. Η σύνδεση των εξισώσεων με τον κύκλο και τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων είναι σημαντική ακόμα και όταν οι μαθητές/-ήτριες έχουν αναπτύξει αλγοριθμικές δεξιότητες αλγεβρικής επίλυσης των τριγωνομετρικών εξισώσεων. Αυτό μπορεί να γίνεται με παραδείγματα όπως η ενδεικτική δραστηριότητα 2 παρακάτω, αλλά και με παραδείγματα που ζητείται η άντληση συμπερασμάτων από τη γραφική παράσταση περιοδικής συνάρτησης (π.χ. εμπλουτίζοντας της άσκηση 3 της Β' Ομάδας της §3.4 με το ερώτημα "πότε περίπου η απόσταση του παιχνιδιού από το έδαφος γίνεται 1,25m;")

Προτείνεται να μη γίνουν η άσκηση 11(ii) της Α' Ομάδας και οι ασκήσεις 1, 2, 4, 5 της Β' Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Δίνεται γωνία ω (σε rad), με $0 \leq \omega < 2\pi$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$ και $\sigma\upsilon\nu\omega > 0$.

Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο, να εξηγήσετε γιατί είναι μοναδική και να βρείτε το μέτρο της.

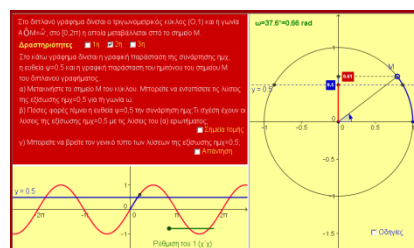
β) Να βρείτε όλες τις γωνίες ϕ με $0 \leq \phi < 2\pi$, που ικανοποιούν τη σχέση $\eta\mu\phi = \frac{1}{2}$ και να τις σχεδιάσετε πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο.

γ) Να βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $\eta\mu x = \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Με το μικροπείραμα «Η εξίσωση $\eta\mu\chi=\alpha$ » από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές/-ήτριες βρίσκουν τις λύσεις μιας συγκεκριμένης εξίσωσης στον τριγωνομετρικό κύκλο και μέσω πολλαπλών δυναμικά αλληλοσυνδεόμενων γεωμετρικών και γραφικών αναπαραστάσεων, γενικεύουν τις λύσεις αυτές σ' όλο το $\mathbb{R}$. Στη συνέχεια δημιουργούν τις δικές τους εξισώσεις και τις λύνουν επαληθεύοντας ταυτόχρονα τις λύσεις τους γραφικά.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5141>



Κεφάλαιο 4ο

(Προτείνεται να διατεθούν 21 διδακτικές ώρες)

Όλη η διδασκαλία των πολυωνύμων θα πρέπει να εμπλουτιστεί με την – αν όχι να εστιαστεί στη – συναρτησιακή προσέγγιση των πολυωνύμων. Αυτή η προσέγγιση α) θα παρέχει στους/στις μαθητές/-ήτριες τη δυνατότητα πρόσβασης σε γεωμετρικές αναπαραστάσεις (όπως είναι η γραφική παράσταση συνάρτησης) που μπορούν να βοηθήσουν στην απόδοση νοήματος και την κατανόηση και β) θα μειώσει τον ρόλο αφηρημένων αλγεβρικών προσεγγίσεων των πολυωνύμων που δεν συνδέονται με την κατανόηση ούτε με την περαιτέρω διδασκαλία των σχολικών μαθηματικών.

§4.1 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

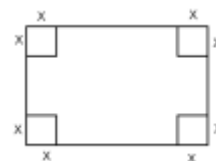
Μετά τη διαπραγμάτευση των βασικών εννοιών των πολυωνύμων προτείνεται να παρουσιαστούν (είτε με λογισμικό, είτε με έντυπη μορφή) οι γραφικές παραστάσεις μερικών πολυωνυμικών συναρτήσεων όπως οι $f(x) = x^3$, $f(x) = -x^3$, $f(x) = x^3 - 3x$, $f(x) = x^4 - 2x^2$, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 11$. Στόχος είναι η παρατήρηση και ο σχολιασμός των ιδιοτήτων τους, των σημείων τομής με τους άξονες, των τμημάτων που βρίσκονται πάνω ή κάτω από τον άξονα x' , κ.λπ.

Ως προς τις ασκήσεις, προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι 1 και 2, 5 και 6 της Α' Ομάδας και 2, 3 και 5 της Β' Ομάδας.

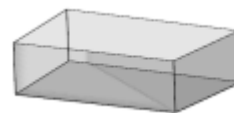
Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Από ένα χαρτόνι διαστάσεων 20×30 εκατοστών κόβουμε τετράγωνα πλευράς x (όπως φαίνεται στο σχήμα) με σκοπό να κατασκευάσουμε ένα κουτί ανοικτό από πάνω.

α) Να βρείτε μια συνάρτηση που να εκφράζει τον όγκο του κουτιού. Τι τιμές μπορεί να πάρει το x ;



β) Ο Γιάννης ισχυρίζεται ότι όσο αυξάνεται το x , μειώνεται ο όγκος. Να φτιάξετε ένα πίνακα τιμών για να διαπιστώσετε αν ο Γιάννης έχει δίκιο.

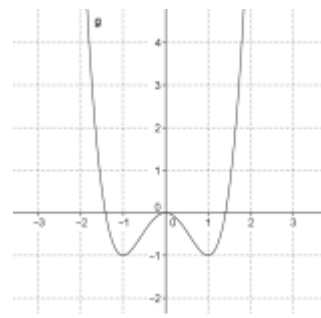
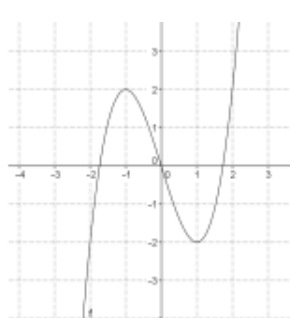


γ) Να βρείτε (με προσέγγιση) πόσο πρέπει να είναι το x ώστε το κουτί να έχει το μέγιστο όγκο.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^3 - 3x$ και $g(x) = x^4 - 2x^2$

χρησιμοποιώντας κάποιο λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας (εναλλακτικά μπορεί τα σχήματα να δίνονται στους/στις μαθητές/-ήτριες όταν δεν υπάρχει δυνατότητα σχεδιασμού με ψηφιακά εργαλεία). Παρατηρώντας το σχήμα,



- να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα των f και g .
- Είναι κάποια συνάρτηση άρτια ή περιττή;
- Να βάλετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς $g(-2)$, $g(-0,5)$, $g(0)$, $g(1)$, $g(1,5)$.

§4.2 Προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες

Προτείνεται να δοθεί έμφαση στη χρήση των θεωρημάτων της υποπαραγράφου "Διαίρεση πολυωνύμου με $x-r$ " και πιο συγκεκριμένα, στη μεταξύ τους σχέση και στη συνέπεια που έχουν για τη παραγοντοποίηση πολυωνύμου. Για το σχήμα Horner καλό είναι να εξηγηθεί η σχέση του με τους συντελεστές που εμφανίζονται κατά τη διαδικασία της διαίρεσης (όπως στο εισαγωγικό παράδειγμα του σχολικού βιβλίου ή με άλλο αριθμητικό παράδειγμα).

Προτείνεται να μη συζητηθούν οι ασκήσεις 1, 2 και 5 της Β' Ομάδας.

§4.3 Προτείνεται να διατεθούν 8 ώρες

Στην ενότητα αυτή εισάγονται νέα εργαλεία για την παραγοντοποίηση πολυωνύμων μέσω της οποίας επιλύονται στη συνέχεια πολυωνυμικές εξισώσεις και ανισώσεις βαθμού μεγαλύτερου από 2. Αν και οι ακέραιες ρίζες ενός τυχαίου πολυωνύμου δεν εμφανίζονται συχνά, παρόλα αυτά το θεώρημα είναι ένα χρήσιμο εργαλείο. Ωστόσο, για τη λύση πολυωνυμικής εξίσωσης, έμφαση πρέπει να δοθεί στην προτεραιότητα της παραγοντοποίησης του αντίστοιχου πολυωνύμου.

Ο προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση είναι ένα χρήσιμο αριθμητικό εργαλείο που μπορεί να συνδεθεί με τον τρόπο που θα μπορούσε να προσδιορίσει κανείς μη ακέραια ρίζα αν είχε στη διάθεσή του κάποια υπολογιστική μηχανή. Κυρίως όμως, αυτή η μέθοδος, επειδή στηρίζεται στη

γεωμετρική ερμηνεία του Θ . Bolzano, υποστηρίζει τη συναρτησιακή προσέγγιση και την οπτικοποίηση των σχετιζόμενων εννοιών.

Στο πλαίσιο της επίλυσης ανισώσεων, προτείνεται να συζητηθούν και πάλι οι ανισώσεις δευτέρου βαθμού και να συνδεθούν (όπως και όλες οι πολυωνυμικές ανισώσεις) με τη γεωμετρική ερμηνεία τους.

Προτείνεται να γίνουν οι ασκήσεις 1, 2, 4, 5, 6 και 8 της Α' Ομάδας και προβλήματα της Β' Ομάδας, τα οποία οδηγούν στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Μια βιομηχανία έχει υπολογίσει ότι για την ημερήσια παραγωγή x μονάδων από ένα προϊόν έχει κόστος $K(x) = -2x^2 + 120x + 100$ χιλιάδες ευρώ, ενώ η πώληση αυτών των x μονάδων της αποφέρει έσοδα $E(x) = x^3 - x^2 + 20x$ χιλιάδες ευρώ. Η βιομηχανία μπορεί να παράγει μέχρι 20 μονάδες αυτού του προϊόντος καθημερινά.

α) Ποια παραγωγή δίνει έσοδα 20.000 ευρώ;

β) Πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία για να έχει κέρδος;

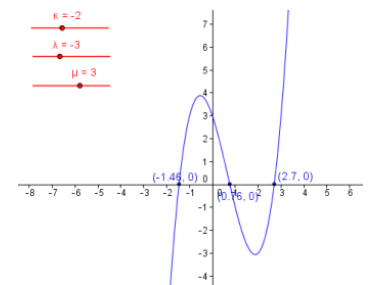
Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να εξετάσετε αν η εξίσωση $x^3 + 2x - 2 = 0$ έχει ρίζα μεταξύ των αριθμών 0 και 1. Να προσδιορίσετε αυτή τη ρίζα με προσέγγιση εκατοστού, χρησιμοποιώντας υπολογιστή τσέπης. Μπορείτε με τον ίδιο τρόπο να διαπιστώσετε αν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης μεταξύ των αριθμών 1 και 2;

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

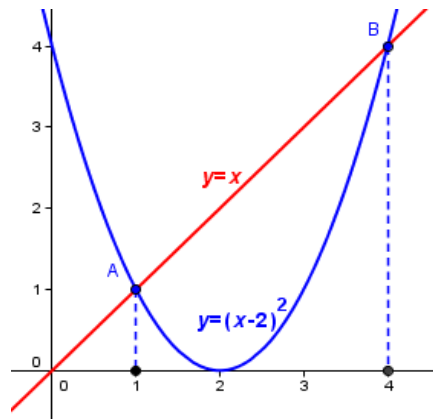
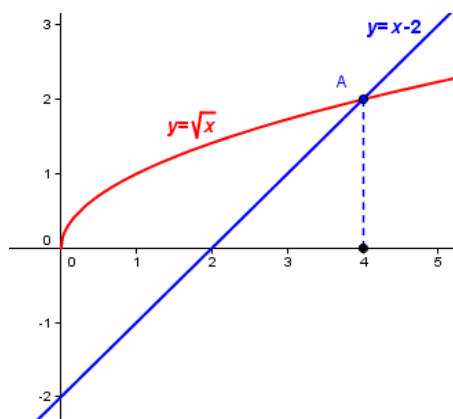
Με το μικροπείραμα «Πολυωνυμική εξίσωση 3ου βαθμού» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές/-τριες διερευνούν τη σχέση των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης 3ου βαθμού, με τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της αντίστοιχης πολυωνυμικής συνάρτησης τέμνει τον οριζόντιο άξονα.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5229>



§4.4 Προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες

Στην ενότητα αυτή επιλύονται εξισώσεις και ανισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές, όπως άρρητες και κλασματικές εξισώσεις και ανισώσεις. Να δοθεί έμφαση στο γεγονός ότι η ύψωση των μελών μιας εξίσωσης στο τετράγωνο δεν οδηγεί πάντα σε ισοδύναμη εξίσωση. Αυτό μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια των παρακάτω γραφικών παραστάσεων που αναφέρονται στο παράδειγμα 2.



Προτείνεται η αποφυγή πολύπλοκων ασκήσεων (όπως πχ. οι ασκήσεις 3viii, 6 της Α' Ομάδας και οι ασκήσεις 2, 3, 4 και 5 της Β' Ομάδας) οι οποίες ξεφεύγουν από τους στόχους διδασκαλίας του μαθήματος.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

α) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x+3} = x+1$ (E_1).

β) Να λύσετε την εξίσωση $x+3 = (x+1)^2$ (E_2).

γ) Να εξηγήσετε γιατί η E_1 και η E_2 δεν έχουν τις ίδιες ακριβώς λύσεις, αν και η E_2 προκύπτει από την E_1 αν υψώσουμε και τα δύο μέλη της στο τετράγωνο.

δ) Να λύσετε γραφικά τις εξισώσεις του α) και του β) ερωτήματος.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2+1}{2x}$ και την ευθεία $y = \frac{1}{2}x$

χρησιμοποιώντας λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας. Παρατηρώντας το σχήμα,

α) να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

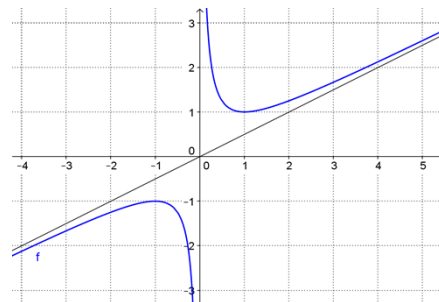
β) να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

γ) να βρείτε από τη γραφική παράσταση (κατά προσέγγιση) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 2$. Να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας.

δ) να εξετάσετε για ποιες τιμές του c η εξίσωση $f(x) = c$ έχει λύσεις και πόσες. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

ε) να εξετάσετε για ποιες τιμές του a η ευθεία $y = ax$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f .

στ) να βρείτε γραφικά και αλγεβρικά τις λύσεις της ανίσωσης $\frac{x^2+1}{2x} > \frac{1}{2}$.



Κεφάλαιο 5ο

(Προτείνεται να διατεθούν 18 διδακτικές ώρες)

§5.1 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Η έννοια της εκθετικής μεταβολής που συνδέεται με σημαντικά φαινόμενα της πραγματικότητας, μπορεί να αποτελέσει την εισαγωγή στην εκθετική συνάρτηση. Αν και συχνά στα πραγματικά φαινόμενα που μελετάμε, οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής είναι διακριτές (συχνά είναι φυσικοί αριθμοί), τέτοια φαινόμενα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την μετάβαση στην εκθετική συνάρτηση, δηλαδή σε πεδίο ορισμού τους πραγματικούς. Η έμφαση στη διδασκαλία της εκθετικής συνάρτησης πρέπει να είναι στα προβλήματα και στις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης όπως προκύπτουν από τη γραφική της παράσταση.

Προτείνεται να δοθεί προτεραιότητα στις ασκήσεις 1-5 της Α' Ομάδας και στα προβλήματα 6, 7 και 8 της Β' Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Τα βακτήρια είναι πολύ μικροί, μονοκύτταροι οργανισμοί που είναι μακράν οι πιο πολυπληθείς οργανισμοί στη Γη, οι οποίοι αναπαράγονται μέσω μιας διεργασίας που ονομάζεται διχοτόμηση: ένα κύτταρο χωρίζεται στη μέση, σχηματίζοντας δύο "θυγατρικά κύτταρα". Ένα τέτοιο βακτήριο είναι η σαλμονέλα (salmonella), το οποίο σε θερμοκρασία περιβάλλοντος 35 ° C διαιρείται κάθε ώρα και σχηματίζονται δυο άλλα βακτήρια.

Ας υποθέσουμε ότι σε μια μερίδα τροφής υπάρχουν 100 βακτήρια σαλμονέλας και ότι η θερμοκρασία περιβάλλοντος είναι 35 ° C.

α) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα

Χρόνος (σε ώρες)	0	1	2	3	4	5
Αριθμός βακτηρίων	100					

β) Να αποτυπώσετε τα δεδομένα του πίνακα με σημεία σε κατάλληλο σύστημα ορθογωνίων αξόνων. Η σχέση μεταξύ του αριθμού των βακτηρίων και χρόνου είναι γραμμική; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

γ) Να εκτιμήσετε το χρόνο που θα υπάρχουν α) 1200 βακτήρια, β) 4.550 βακτήρια και γ) περισσότερα από 7.200 βακτήρια στη μερίδα τροφής.

δ) Να γράψετε μια σχέση που να εκφράζει το πλήθος των βακτηρίων σαλμονέλας ως συνάρτηση του χρόνου. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης ;

ε) Μπορούμε να υπολογίσουμε ανά πάσα χρονική στιγμή τον πληθυσμό των βακτηρίων; Θα είχαν νόημα για το συγκεκριμένο πρόβλημα οι αρνητικές τιμές για α) για το χρόνο και β) για τον πληθυσμό των βακτηρίων;

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Να δοθούν οι γραφικές παραστάσεις των ακόλουθων ομάδων συναρτήσεων. Να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες να συγκρίνουν τα γραφήματά τους και να προσδιορίσουν τυχόν

ομοιότητες και διαφορές που αφορούν α) στο πεδίο ορισμού, β) στο σύνολο τιμών, γ) στα σημεία τομής με τους άξονες, δ) στη μονοτονία, ε) στις ασύμπτωτες και στ) στη συμμετρία.

➤ $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 3 \cdot 2^x$, $f_3(x) = -3 \cdot 2^x$, $f_4(x) = 4 \cdot 2^x$.

➤ $f(x) = 2^x$, $g(x) = \frac{1}{4} \cdot 2^x$.

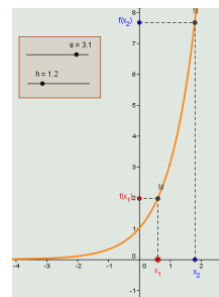
➤ $f_1(x) = 2^x$, $f_2(x) = 2^x + 3$, $f_3(x) = 2^{x-3}$, $f_4(x) = 2^{x-3} + 3$

➤ $f(x) = 2^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Ενδεικτική δραστηριότητα 3:

Με το μικροπείραμα «Η μονοτονία μιας εκθετικής συνάρτησης» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές/-ήτριες διερευνούν την έννοια της μονοτονίας και τη μελέτη της μονοτονίας μιας εκθετικής συνάρτησης. Με τη βοήθεια του λογισμικού μεταβάλλουν τη βάση μιας εκθετικής συνάρτησης και παρατηρώντας τη γραφική της παράσταση βρίσκουν τη μονοτονία της με τη βοήθεια του ορισμού.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5238>



§5.2 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Η κατανόηση των λογαρίθμων και των ιδιοτήτων τους μπορεί να στηριχτεί στον ορισμό του λογαρίθμου και στις ήδη γνωστές ιδιότητες των δυνάμεων. Επιπλέον, στο ιστορικό σημείωμα που υπάρχει στο τέλος του κεφαλαίου (αλλά και αλλού) μπορεί κανείς να βρει στοιχεία που δικαιολογούν την «επινόηση» των λογαρίθμων. Έμφαση πρέπει να δοθεί στα παραδείγματα 1 και 2 που περιγράφουν την κλίμακα Richter για τη μέτρηση των σεισμών και το pH για την οξύτητα ενός διαλύματος. Τα παραδείγματα αυτά εισάγουν την αξιοποίηση των λογαρίθμων στην καθημερινή ζωή.

Αντίθετα, μια προσπάθεια απομνημόνευσης τύπων και τεχνασμάτων χωρίς νόημα δεν είναι μαθησιακά αποδοτική και δεν ενθαρρύνεται.

Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις της Α' Ομάδας με έμφαση στα προβλήματα και οι ασκήσεις 2, 3, 5 της Β' Ομάδας. Να μη γίνουν οι ασκήσεις 6, 7 και 8 της Β' Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Για απλό ήχο δεδομένης έντασης I , η ένταση του υποκειμενικού αισθήματος που αντιλαμβάνεται κάποιος ακροατής ονομάζεται ακουστότητα L του ήχου. Για την ακουστότητα L χρησιμοποιείται ως μονάδα μέτρησης το 1 decibel και για την ένταση I το watt/m^2 .

Έχει βρεθεί πειραματικά ότι η ακουστότητα L σχετίζεται με την ένταση I με λογαριθμικό τρόπο, σύμφωνα με τον τύπο $L = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$, όπου I_0 η μικρότερη ένταση ήχου που μπορεί να

ακούσει το αυτί του ανθρώπου, και είναι περίπου ίση με $10^{-12} \text{ watt/m}^2$. Να υπολογίσετε την ακουστότητα απλού ήχου έντασης: α) 10^{-6} watt/m^2 και β) δεκαπλάσιας από το I_0 .

§5.3 Προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες

Για τον ορισμό της λογαριθμικής συνάρτησης είναι σημαντική η σχέση της με την εκθετική, τόσο αλγεβρικά (με την ισοδυναμία $y = a^x \Leftrightarrow \log_a y = x$), όσο και γεωμετρικά (με τη συμμετρία των δύο γραφικών παραστάσεων ως προς την $y = x$). Επίσης, κατ' αντιστοιχία με την εκθετική συνάρτηση, έμφαση θα πρέπει να δοθεί σε προβλήματα και στις ιδιότητες της λογαριθμικής συνάρτησης όπως προκύπτουν από τη γραφική της παράσταση.

Θα διδαχθούν μόνο οι συναρτήσεις $f(x) = \log x$ και $f(x) = \ln x$. Ωστόσο, για λόγους κατανόησης της σχέσης με την αντίστοιχη εκθετική συνάρτηση, θα μπορούσαν να αναφερθούν και οι λογαριθμικές συναρτήσεις με βάση a , με $0 < a < 1$, σε αυτή την περίπτωση όμως, θα πρέπει να επισημανθεί ότι η διδακτέα ύλη περιορίζεται στις $f(x) = \log x$ και $f(x) = \ln x$.

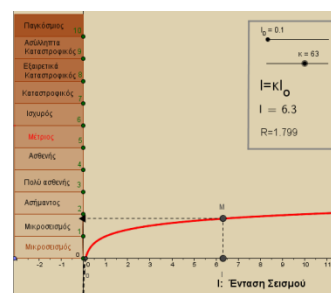
Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα οι ασκήσεις: 2, 5, 6, 7 και 8 της Α' Ομάδας και 1(i, iii), 3, 5, 7 και 8 της Β' Ομάδας.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Προτείνεται να χρησιμοποιηθεί το μικροπείραμα «Λογαριθμική μεταβολή – Κλίμακα Richter» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την κατανόηση της λογαριθμικής μεταβολής. Με τη βοήθεια του λογισμικού, οι μαθητές/-ήτριες από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του μεγέθους ενός σεισμού σε κλίμακα Richter ως προς την έντάσή του, δημιουργούν εικασίες σχετικά με τη σχέση που έχουν αυτά τα δύο μεγέθη και τις αποδεικνύουν αλγεβρικά.

Στη συνέχεια, συγκρίνουν τις εντάσεις σεισμών που έχουν συμβεί στο παρελθόν και λύνουν τα προβλήματα γραφικά και αλγεβρικά.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5240>



Η εγκατάσταση των Διαδραστικών Συστημάτων Μάθησης στα σχολεία προσφέρει πολυάριθμα πλεονεκτήματα στο σχεδιασμό και στην ανάπτυξη της διδασκαλίας. Συγκεκριμένα:

- Παρέχεται η δυνατότητα οργάνωσης, καταγραφής και αποθήκευσης μαθημάτων που δύνανται να αξιοποιηθούν τόσο από τους/τις εκπαιδευτικούς όσο κι από τους/τις μαθητές/-τριες, δημιουργώντας ένα «υβριδικό περιβάλλον εργασίας», που λειτουργεί ως διδακτικό αποθετήριο και εμπλουτίζεται στο πλαίσιο της σύγχρονης και ασύγχρονης διδασκαλίας.
- Προσφέρεται η εύκολη πρόσβαση στο note, στα σχεδιαστικά εργαλεία των οθονών αφής, σε ποικίλους Ανοικτούς Εκπαιδευτικούς Πόρους / Open Educational Resources (ΑΕΠ / OER) που περιλαμβάνουν κατηγορίες όπως: Εκπαιδευτικά Παιχνίδια/Δυναμικός Χάρτης/Εφαρμογές Λογισμικού/AR-VR-MR Αντικείμενα /3D Αντικείμενα κ.ά. καθώς και στην εφαρμογή mozaBook (που είναι προεγκατεστημένη στο περιβάλλον windows των οθονών και μελλοντικά θα εμπλουτιστεί με τα διαδραστικά σχολικά βιβλία).
- Οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να προσαρμόσουν το υλικό διδασκαλίας τους ώστε να ανταποκρίνεται στη γνωστική ετοιμότητα και στις ανάγκες των μαθητών/-τριών, σε σχέση με την ηλικία τους και τους διαφορετικούς τύπους μάθησης (οπτικός, ακουστικός, κιναισθητικός), προσφέροντας υλικό σε διαφορετικές μορφές, με άξονα τη συμπερίληψη όλων καθώς και την εξατομικευμένη μάθηση. Παράλληλα, η χρήση ποικίλων διαδραστικών δραστηριοτήτων επιτρέπουν την άμεση ανατροφοδότηση και αξιολόγηση του επιπέδου κατανόησης του μαθήματος.
- Η λειτουργία «πολλαπλής αφής» των διαδραστικών οθονών δίνει στον/στην εκπαιδευτικό την ευκαιρία να σχεδιάσει και να ενσωματώσει στη διδασκαλία ομαδικές δραστηριότητες, που επιτρέπουν τη συνέργεια των μαθητών/-τριών, καλλιεργώντας δεξιότητες όπως της συνεργασίας και επικοινωνίας.
- Οι οθόνες αφής μπορούν να συνδεθούν με το Google Drive ή το OneDrive, με υπολογιστές, τάμπλετ και άλλες συσκευές, διευκολύνοντας τη μεταφορά και την κοινή χρήση πληροφοριών.
- Δίνεται η δυνατότητα της αντεστραμμένης διδασκαλίας και η λειτουργία της ανεστραμμένης τάξης.
- Δίνεται η δυνατότητα ένταξης της τεχνητής νοημοσύνης (TN) στη μαθησιακή διαδικασία.
- Διευκολύνεται η χρήση δυναμικών λογισμικών Μαθηματικών, εργαλείων γεωμετρικών κατασκευών, διαδραστικών ασκήσεων, βίντεο-ηχητικών, τρισδιάστατων μοντέλων, εγείροντας το ενδιαφέρον των μαθητών/-τριών και προάγοντας την αφομοίωση της ύλης.
- Τέλος, τα διαδραστικά συστήματα μάθησης υποστηρίζουν και επιταχύνουν τη διενέργεια του μαθήματος καθώς δεν απαιτούν συσκότιση της αίθουσας για να προβληθεί υλικό, έχουν ενσωματωμένα ηχεία και μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαισθητικά με την αφή. Το υλικό των Οδηγιών Διδασκαλίας είναι κατάλληλο για χρήση δια μέσου των διαδραστικών συστημάτων μάθησης. Επιπροσθέτως, τα συστήματα αυτά διαθέτουν την επιλογή της λειτουργίας τους ως ασπρόπινακες με πολλές επιπλέον δυνατότητες πέραν της απλής γραφής κειμένου (π.χ. λειτουργία screenshot της οθόνης και δυνατότητα γραφής σημειώσεων πάνω στο screenshot, αντιγραφή-επικόλληση μέρους των σημειώσεων κ.ά.).
- Το σύνολο των δυνατοτήτων του υλικού κάθε μοντέλου διαδραστικού συστήματος μάθησης μπορεί να αναζητηθεί στις εξής διευθύνσεις:
[Συχνές ερωτήσεις](#) Διαδραστικών Συστημάτων.
[Χρήσιμα αρχεία](#) Διαδραστικών Συστημάτων.

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Α΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2025–2026**

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ Τάξης ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ, ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ, ΜΟΥΣΙΚΟΥ, ΚΑΛΛΙΤΕΧΝΙΚΟΥ ΓΕΛ

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας στην Α΄ Λυκείου εστιάζει στο πέρασμα από τον εμπειρικό στον θεωρητικό τρόπο σκέψης, με ιδιαίτερη έμφαση στον μαθηματικό συλλογισμό, την αιτιολόγηση και τη μαθηματική απόδειξη. Οι μαθητές/-ήτριες έχουν έρθει σε επαφή με στοιχεία θεωρητικής γεωμετρικής σκέψης και στο Γυμνάσιο, όπου έχουν αντιμετωπίσει ασκήσεις που απαιτούν θεωρητική απόδειξη. Στην Α΄ Λυκείου, πρέπει αυτή η εμπειρία των μαθητών/-τριών να αξιοποιηθεί με στόχο την περαιτέρω ανάπτυξη της θεωρητικής τους σκέψης, κάτι που μπορεί να γίνει βαθμιαία και λαμβάνοντας υπόψη τις δυσκολίες του εγχειρήματος. Η διατύπωση ορισμών γεωμετρικών εννοιών είναι κάτι δύσκολο για τους/τις μαθητές/-ήτριες, ακόμα και αυτής της τάξης, καθώς απαιτεί τη συνειδητοποίηση των κρίσιμων και ελάχιστων ιδιοτήτων που απαιτούνται για τον καθορισμό μιας έννοιας. Για τον λόγο αυτό προτείνεται η διαμόρφωση ορισμών μέσα από συζήτηση στην τάξη: μπορεί να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες μια πρώτη προσπάθεια ορισμού, να ακολουθήσει κριτική εξέταση (από τους/τις μαθητές/-ήτριες) που οδηγεί σε μια βελτιωμένη εκδοχή, η οποία πάλι εξετάζεται κ.ο.κ. Επίσης οι μαθητές/-ήτριες χρειάζεται να διερευνούν ιδιότητες και σχέσεις των γεωμετρικών εννοιών και να δημιουργούν εικασίες τις οποίες να προσπαθούν να τεκμηριώσουν. Η αντιμετώπιση της μαθηματικής απόδειξης απλά ως περιγραφή μιας σειράς λογικών βημάτων που παρουσιάζονται από τον/την εκπαιδευτικό, δεν είναι κατάλληλη ώστε να μυηθούν οι μαθητές/-ήτριες στη σημασία και στην κατασκευή μιας απόδειξης. Αντίθετα, είναι σημαντικό να εμπλακούν οι μαθητές/-ήτριες σε αποδεικτικές διαδικασίες, να προσπαθούν να εντοπίζουν τη βασική αποδεικτική ιδέα, μέσω πειραματισμού και διερεύνησης, και να χρησιμοποιούν μετασχηματισμούς και αναπαραστάσεις, που υποστηρίζουν την ανάπτυξη γεωμετρικών συλλογισμών. Θα πρέπει λοιπόν, να δοθεί έμφαση σε αποδείξεις που οι μαθητές/-ήτριες μπορούν να «ανακαλύψουν» μέσα στην τάξη (π.χ. οι ιδιότητες των παραλληλογράμων και τα αντίστοιχα κριτήρια) αντί για αποδείξεις που μπορούν μόνο να παρουσιαστούν από τον/την εκπαιδευτικό και να αποστηθιστούν από τον/την μαθητή/-ήτρια (πχ τα θεωρήματα της παρ. 5.7 και 5.8). Η κατασκευή από τους/τις μαθητές/-ήτριες αντιπαραδειγμάτων και η συζήτηση για το ρόλο τους είναι μια σημαντική διαδικασία, ώστε να αρχίσουν να αποκτούν μια πρώτη αίσθηση της σημασίας του αντιπαραδείγματος στα Μαθηματικά. Η απαγωγή σε άτοπο είναι επίσης μια μέθοδος που συχνά συναντούν οι μαθητές/-ήτριες στην απόδειξη αρκετών θεωρημάτων. Ο ρόλος του «άτοπου» στην τεκμηρίωση του αρχικού ισχυρισμού αλλά και το κατά πόσο η άρνηση του συμπεράσματος οδηγεί τελικά στην τεκμηρίωσή του, δημιουργούν ιδιαίτερη δυσκολία στους/στις μαθητές/-ήτριες. Σε όλα τα παραπάνω ουσιαστικό ρόλο μπορεί να παίξει η αξιοποίηση λογισμικών Δυναμικής Γεωμετρίας.

[Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κ.λπ. Οι δραστηριότητες που αναφέρονται ως Δ1, Δ2 κ.λπ. περιέχονται στο Αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών της Α΄ Λυκείου (ΦΕΚ 162/22-1-2015) το οποίο μπορεί να ανακτηθεί από τον ιστότοπο του ΙΕΠ: <http://www2.iep.edu.gr/el/geniko-lyk/programmata-spoudon>]

Στο πλαίσιο του διδακτικού σχεδιασμού οι εκπαιδευτικοί, προκειμένου να αξιοποιήσουν τις προτεινόμενες **ιστοσελίδες** από το διδακτικό υλικό ή/και τα διδακτικά βιβλία, να προβαίνουν σε επανέλεγχο της εγκυρότητάς τους, διότι ενδέχεται λόγω του δυναμικού τους χαρακτηρησμένες από αυτές να είναι ανενεργές ή να οδηγούν σε διαφορετικό περιεχόμενο.

Κεφάλαιο 2° (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες)

Εισαγωγή (Προτείνεται να διατεθεί 1 διδακτική ώρα)

Στόχος της εισαγωγής είναι η διάκριση και επισήμανση των διαφορετικών χαρακτηριστικών της Πρακτικής Γεωμετρίας, που οι μαθητές/-ήτριες διδάχθηκαν σε προηγούμενες τάξεις, και της Θεωρητικής Γεωμετρίας που θα διδαχθούν στο Λύκειο. Κάποια ζητήματα που θα μπορούσαν να συζητηθούν για την ανάδειξη των πλεονεκτημάτων της Θεωρητικής Γεωμετρίας έναντι της Πρακτικής, είναι: Η αδυναμία ακριβούς μέτρησης, η ανάγκη μέτρησης αποστάσεων μεταξύ απρόσιτων σημείων, η αναξιопιστία των εμπειρικών προσεγγίσεων (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ1 και Δ2 του ΠΣ)

Για να αποκτήσουν οι μαθητές/-ήτριες μια πρώτη αίσθηση των βασικών αρχών της ανάπτυξης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως αξιωματικού συστήματος, προτείνεται να εμπλακούν σε μια συζήτηση σχετικά με τη σημασία και το ρόλο των όρων «πρωταρχική έννοια», «ορισμός», «αξίωμα», «θεώρημα», «απόδειξη». Στοιχεία της ιστορικής εξέλιξης της Γεωμετρίας μπορούν να αξιοποιηθούν από το 1ο κεφάλαιο και να αποτελέσουν ένα πλαίσιο αναφοράς στο οποίο θα αναδειχθούν τα παραπάνω ζητήματα.

§2.16 (Να διατεθούν 2 ώρες)

Σε συνέχεια της συζήτησης που περιγράφεται παραπάνω (στην Εισαγωγή), προτείνεται η διαπραγμάτευση στην τάξη των θεωρημάτων της παραγράφου 2.16 αφενός ως εισαγωγή στην αποδεικτική διαδικασία, που περιλαμβάνει τη διερεύνηση, την εικασία και την αναζήτηση λογικών συλλογισμών που υποστηρίζουν ή απορρίπτουν την εικασία και αφετέρου ως συμπεράσματα τα οποία χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στη συνέχεια.

Κεφάλαιο 3° (Προτείνεται να διατεθούν 18 διδακτικές ώρες)

§3.1, §3.2 (Να διατεθούν 3 ώρες)

§3.3, §3.4 (Να διατεθούν 3 ώρες)

§3.5, §3.6 (Να διατεθούν 3 ώρες)

Οι μαθητές/-ήτριες έχουν διαπραγματευθεί το μεγαλύτερο μέρος του περιεχομένου των παραγράφων 3.1 έως 3.6 στο Γυμνάσιο. Προτείνεται να δοθεί έμφαση σε κάποια στοιχεία όπως:

α) Η σημασία της ισότητας των ομολογων πλευρών στη σύγκριση τριγώνων.

β) Η διαπραγμάτευση παραδειγμάτων τριγώνων με τρία ή περισσότερα κύρια στοιχεία τους ίσα, τα οποία -τρίγωνα- δεν είναι ίσα. Για παράδειγμα, αν κατασκευάσουμε ένα τρίγωνο με πλευρές 10, 12 και 14,4 εκατοστά και το φωτοτυπήσουμε με μεγέθυνση 120%, το νέο τρίγωνο

θα έχει 5 από τα 6 κύρια στοιχεία του ίσα με το αρχικό (τρεις γωνίες και δύο πλευρές), αλλά προφανώς τα τρίγωνα δεν είναι ίσα.

γ) Ο σχεδιασμός σχημάτων με βάση τις λεκτικές διατυπώσεις των γεωμετρικών προτάσεων (ασκήσεων, θεωρημάτων) και αντίστροφα.

δ) Η διατύπωση των γεωμετρικών συλλογισμών των μαθητών/-ητριών από τους/τις ίδιους/-ες.

ε) Η ισότητα τριγώνων, ως μια στρατηγική απόδειξης ισότητας ευθυγράμμων τμημάτων ή γωνιών (σχόλιο στο τέλος της §3.2).

στ) Ο εντοπισμός κατάλληλων τριγώνων, σε σύνθετα σχήματα, για σύγκριση (όπως, για παράδειγμα, στις αποδεικτικές ασκήσεις 2 της σελ. 48 και 4 της σελ. 54).

ζ) Η σημασία της «βοηθητικής γραμμής» στην αποδεικτική διαδικασία (πόρισμα I της §3.2).

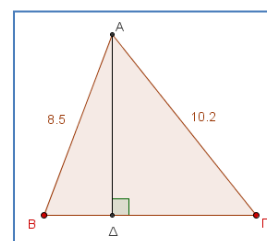
Οι αποδείξεις των θεωρημάτων και των πορισμάτων των παραγράφων 3.2, 3.4, 3.6 δεν αποτελούν εξεταστέα ύλη. Ωστόσο, οι αποδείξεις των πορισμάτων αυτών των παραγράφων προτείνεται να συζητηθούν στην τάξη ως ασκήσεις εφαρμογής των κριτηρίων ισότητας τριγώνων αντί πιο σύνθετων ασκήσεων, και ως μέσο μιας ολιστικής θεώρησης των ιδιοτήτων των τριγώνων. Συγκεκριμένα προτείνεται:

- Να ενοποιηθούν σε μια πρόταση οι προτάσεις που ταυτίζουν τη διχοτόμο, τη διάμεσο και το ύψος από τη κορυφή ισοσκελούς τριγώνου (πόρισμα I της §3.2, πόρισμα I της §3.4, πόρισμα I της §3.6).
- Μαζί με την πρόταση αυτή να γίνει η διαπραγμάτευση της εφαρμογής 2 της §3.12 για την απόδειξη της οποίας αρκούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.
- Σαν μια ενιαία πρόταση, να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες να δείξουν ότι σε ίσα τρίγωνα τα δευτερεύοντα στοιχεία τους (διάμεσος, ύψος, διχοτόμος) που αντιστοιχούν σε ομόλογες πλευρές είναι επίσης ίσα (π.χ. άσκηση 1i Εμπέδωσης της §3.4, άσκηση 4 Εμπέδωσης της §3.6). Ενιαία μπορούν να αντιμετωπιστούν, ως αντίστροφες προτάσεις, τα πορίσματα IV της §3.2 και III, IV της §3.4 που αναφέρονται στις σχέσεις των χορδών και των αντίστοιχων τόξων.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Με το μικροπείραμα «Ύψος, Διάμεσος και διχοτόμος της κορυφής ισοσκελούς τριγώνου» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, οι μαθητές/-ήτριες οδηγούνται μέσα από πειραματισμούς και εικασίες στην εύρεση της σχέσης που συνδέει το ύψος, τη διάμεσο και τη διχοτόμο της κορυφής ενός ισοσκελούς τριγώνου. Παράλληλα μαθαίνουν για το ρόλο της εικασίας και του πειραματισμού στη διαδικασία της εύρεσης σχέσεων μεταξύ γεωμετρικών αντικειμένων.

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/2277>



§3.7 (Να διατεθεί 1 ώρα)

Με στόχο την ανάδειξη της διδακτικής αξίας των γεωμετρικών τρόπων προτείνεται τα πορίσματα ΙΙΙ της §3.2 και ΙΙ της §3.4, που αφορούν στη μεσοκάθετο τμήματος, καθώς και το θεώρημα ΙV της §3.6, που αφορά στη διχοτόμο γωνίας, να διδαχθούν ενιαία ως παραδείγματα βασικών γεωμετρικών τρόπων. Συγκεκριμένα, προτείνεται οι μαθητές/-ήτριες πρώτα να εικάσουν τους συγκεκριμένους γεωμετρικούς τρόπους και στη συνέχεια να τους αποδείξουν.

§3.10 - §3.12 (Να διατεθούν 3 ώρες)

Η ύλη των παραγράφων αυτών είναι νέα για τους/τις μαθητές/-ήτριες. Να επισημανθεί στους/στις μαθητές/-ήτριες ότι η τριγωνική ανισότητα αποτελεί κριτήριο για το πότε τρία ευθύγραμμα τμήματα αποτελούν πλευρές τριγώνου (προτείνονται οι δραστηριότητες Δ9, Δ10 και Δ11 του ΠΣ). Στόχος είναι οι μαθητές/-ήτριες να διαπιστώσουν την αναγκαιότητα της τριγωνικής ανισότητας για την κατασκευή ενός τριγώνου όπως για παράδειγμα στην Ερώτηση Κατανόησης 3, αλλά και για τη λειτουργικότητά της όπως για παράδειγμα στην αποδεικτική άσκηση 4 που διαπραγματεύεται την απόσταση σημείου από κύκλο.

§3.14 - §3.16 (Να διατεθούν 3 ώρες)

Τα συμπεράσματα της §3.14 είναι γνωστά στους/στις μαθητές/-ήτριες από το Γυμνάσιο. Το περιεχόμενο της §3.16 δεν είναι γνωστό στους/στις μαθητές/-ήτριες και χρειάζεται και για τις γεωμετρικές κατασκευές που ακολουθούν.

§3.17, §3.18 (Να διατεθούν 2 ώρες)

Η διαπραγμάτευση των γεωμετρικών κατασκευών συμβάλλει στην κατανόηση των σχημάτων από τους/τις μαθητές/-ήτριες με βάση τις ιδιότητές τους καθώς και στην ανάπτυξη της αναλυτικής και συνθετικής σκέψης η οποία μπορεί να αξιοποιηθεί και σε εξωμαθηματικές γνωστικές περιοχές. Προτείνεται να γίνουν κατά προτεραιότητα τα προβλήματα 2 και 4 της §3.17 και τα προβλήματα 2 και 3 της §3.18.

Κεφάλαιο 4^ο (Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

§4.1, §4.2, §4.4, §4.5 (Να διατεθούν 5 ώρες)

Το σημαντικότερο θέμα στις παραγράφους αυτές αποτελεί το «αίτημα παραλληλίας» το οποίο καθορίζει τη φύση της Γεωμετρίας στην οποία αναφερόμαστε. Η σημασία του «αιτήματος παραλληλίας», για τη Γεωμετρία την ίδια και για την ιστορική της εξέλιξη, μπορεί να διαφανεί από στοιχεία που παρέχονται στο ιστορικό σημείωμα στο τέλος του κεφαλαίου. Οι μαθητές/-ήτριες είναι σημαντικό να αναγνωρίσουν την αδυναμία χρήσης του ορισμού των παραλλήλων ευθειών, καθώς και τη σημασία των προτάσεων της §4.2 (που προηγούνται του «αιτήματος παραλληλίας») ως εργαλεία για την απόδειξη της παραλληλίας δύο ευθειών. Προτείνεται να διερευνήσουν οι μαθητές/-ήτριες τη σχέση του θεωρήματος και της Πρότασης Ι της §4.2 με στόχο να αναγνωρίσουν ότι το ένα είναι το αντίστροφο του άλλου.

Προτείνεται επίσης, με αφορμή τη διαπραγμάτευση των θεωρημάτων της παραγράφου 4.5 να επισημανθεί η στρατηγική που χρησιμοποιείται στις αποδείξεις των θεωρημάτων σχετικά με το πώς δείχνουμε ότι τρεις ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο, γιατί δεν είναι οικεία στους/στις μαθητές/-ήτριες.

§4.6, §4.8 (Να διατεθούν 3 ώρες)

Προτείνεται το θεώρημα της §4.6 να συνδεθεί με τα πορίσματα της §3.10, ώστε οι μαθητές/-ήτριες να αναγνωρίσουν ότι το συμπέρασμα του θεωρήματος είναι ισχυρότερο από τα πορίσματα και ότι αυτό οφείλεται στη χρήση του «αιτήματος παραλληλίας» στην απόδειξή του. Το ίδιο ισχύει και για το πόρισμα (i) της §4.6 σε σχέση με το Θεώρημα της §3.10.

Προτείνεται οι μαθητές/-ήτριες, χρησιμοποιώντας το άθροισμα των γωνιών τριγώνου, να βρουν το άθροισμα των γωνιών τετραπλεύρου, πενταγώνου κ.ά., να εικάσουν το άθροισμα των γωνιών ν-γώνου και να αποδείξουν την αντίστοιχη σχέση (προτείνεται η δραστηριότητα Δ7 του ΠΣ). Δίνεται έτσι η δυνατότητα σύνδεσης Γεωμετρίας και Άλγεβρας. Να επισημανθεί, επίσης, η σταθερότητα του αθροίσματος των εξωτερικών γωνιών ν-γώνου.

Ιστορικό Σημείωμα (1 ώρα)

Στο ιστορικό σημείωμα αναδεικνύεται η σημασία του 5ου αιτήματος στην δημιουργία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και παρουσιάζεται η συζήτηση και οι αναζητήσεις που προκάλεσε η διατύπωσή του, μέχρι τον 19ο αιώνα, και που τελικά οδήγησαν στη δημιουργία των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών. Προτείνεται, η θεματολογία του ιστορικού σημειώματος, να χρησιμοποιηθεί για να γίνουν σχετικές εργασίες από τους/τις μαθητές/-ήτριες.

Κεφάλαιο 5° (Προτείνεται να διατεθούν 19 διδακτικές ώρες)

§5.1, §5.2 (Να διατεθούν 4 ώρες)

Να επισημανθεί ότι καθένα από τα κριτήρια για τα παραλληλόγραμμα περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για να είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του παραλληλογράμμου (προτείνεται η δραστηριότητα Δ12 του ΠΣ). Προτείνεται να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες να διερευνήσουν αν ένα τετράπλευρο με τις δυο απέναντι πλευρές παράλληλες και τις άλλες δυο ίσες είναι παραλληλόγραμμο.

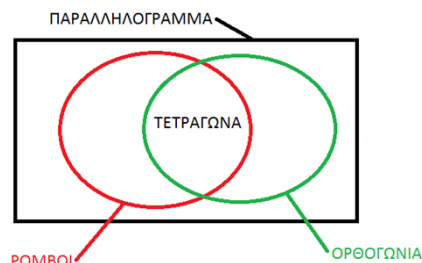
§5.3 - §5.5 (Να διατεθούν 5 ώρες)

Να επισημανθεί ότι κάθε ένα από τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο ή ρόμβος ή τετράγωνο περιέχει τις ελάχιστες ιδιότητες που απαιτούνται για να είναι ισοδύναμο με τον ορισμό του ορθογωνίου ή του ρόμβου ή του τετραγώνου αντίστοιχα. Επιδιώκεται οι μαθητές/-ήτριες να αναγνωρίζουν τα είδη των παραλληλογράμμων (ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο) με βάση τα αντίστοιχα κριτήρια και όχι με βάση κάποια πρότυπα σχήματα που συνδέονται με την οπτική γωνία που τα κοιτάμε. Να δοθεί έμφαση στην ταξινόμηση των παραλληλογράμμων με βάση τις ιδιότητές τους (βλέπε ενδεικτική

δραστηριότητα 1) για την άρση της παρανόησης που δημιουργείται σε μαθητές/-ήτριες, ότι ένα τετράγωνο δεν είναι ορθογώνιο ή ένα τετράγωνο δεν είναι ρόμβος. Προτείνεται να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες να διερευνήσουν: αν ένα τετράπλευρο με ίσες διαγώνιες είναι ορθογώνιο και αν ένα τετράπλευρο με κάθετες διαγώνιες είναι ρόμβος.

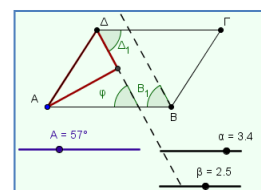
Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

Να δημιουργήσετε διαγραμματική αναπαράσταση της ταξινόμιας των παραλληλογράμμων (π.χ. με χρήση εννοιολογικού χάρτη, διαγράμματος Venn).



Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Η άσκηση εμπέδωσης 3 του σχολικού βιβλίου προτείνεται να υλοποιηθεί διερευνητικά με ψηφιακά εργαλεία και μία κατασκευή όπως αυτή που προτείνεται στο μικροπείραμα «Τι σχήμα δημιουργούν οι διχοτόμοι των γωνιών ενός παραλληλογράμμου;» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία. Με τη βοήθεια του λογισμικού οι μαθητές/-ήτριες μεταβάλλουν τις γωνίες και τις πλευρές ενός παραλληλογράμμου για να δημιουργήσουν την εικασία σχετικά με το σχήμα που δημιουργείται από τις διχοτόμους, ενώ στη συνέχεια αποδεικνύουν την εικασία αυτή.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5825>

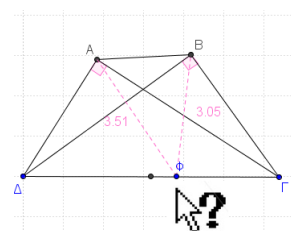
§5.6 – §5.9 (Να διατεθούν 6 ώρες)

Σχετικά με την μεσοπαράλληλο δύο παραλλήλων, προτείνεται να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες να εικάσουν σε ποια γραμμή ανήκουν τα σημεία που ισαπέχουν από δυο παράλληλες ευθείες και στη συνέχεια να αποδείξουν ότι η μεσοπαράλληλή τους είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος. Προτείνεται, επίσης, η διαπραγμάτευση στην τάξη της Εφαρμογής 1 της §5.6. Στην §5.8 προτείνεται να ζητηθεί από τους/τις μαθητές/-ήτριες να διερευνήσουν τα είδη των τριγώνων που το ορθόκεντρο είναι μέσα ή έξω από το τρίγωνο. Προτείνεται επίσης η διαπραγμάτευση της αποδεικτικής άσκησης 10 ώστε οι μαθητές/-ήτριες να αξιοποιήσουν τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων στην επίλυση προβλήματος. Τέλος, θα μπορούσαν να αναζητηθούν εναλλακτικές αποδείξεις για τα θεωρήματα που αφορούν στις ιδιότητες του ορθογωνίου τριγώνου.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Προτείνεται να χρησιμοποιηθεί διερευνητικά το μικροπείραμα «Η σχέση της υποτείνουσας ενός ορθογωνίου τριγώνου με τη διάμεσο που αντιστοιχεί σ' αυτήν και επίλυση προβλημάτων με τη σχέση αυτή».

<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5781>



§5.10, §5.11 (Να διατεθούν 4 ώρες)

Εκτός από το συγκεκριμένο αντικείμενο των παραγράφων αυτών, προτείνεται να εμπλακούν οι μαθητές/-ήτριες στην επίλυση προβλημάτων που συνδυάζουν γεωμετρικά θέματα από όλο το κεφάλαιο, όπως η δραστηριότητα 1 και η εργασία στο τέλος του κεφαλαίου. Προτείνεται επίσης να συζητηθεί με τους/τις μαθητές/-ήτριες η ταξινόμηση των τετραπλεύρων του σχολικού βιβλίου (σελ. 125) και, κατά την κρίση του/της εκπαιδευτικού, η συσχέτιση με άλλες ταξινομήσεις όπως αναφέρονται στο ιστορικό σημείωμα.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Α΄ Τάξης ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΟΥ ΓΕΛ

Η διαχείριση της ύλης είναι αυτή που προτείνεται για την Α΄ τάξη Ημερησίου ΓΕΛ με την ακόλουθη διαφοροποίηση ως προς τις ώρες διδασκαλίας ανά κεφάλαιο.

Κεφ. 2ο: Τα βασικά Γεωμετρικά σχήματα

(προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες)

Κεφ.3ο: Τρίγωνα

(προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες)

Κεφ.4ο: Παράλληλες ευθείες

(προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Κεφ.5ο: Παραλληλόγραμμα – Τραπεζία

(προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες)

Για την προσαρμογή της διδασκαλίας στον διατιθέμενο χρόνο, προτείνεται να δίνεται έμφαση στα βασικά παραδείγματα - εφαρμογές και στην ανάδειξη, μέσω αυτών, του περιεχομένου (εννοιών και μεθόδων) της κάθε παραγράφου.

ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗΣ

Η εγκατάσταση των Διαδραστικών Συστημάτων Μάθησης στα σχολεία προσφέρει πολυάριθμα πλεονεκτήματα στο σχεδιασμό και στην ανάπτυξη της διδασκαλίας. Συγκεκριμένα:

- Παρέχεται η δυνατότητα οργάνωσης, καταγραφής και αποθήκευσης μαθημάτων που δύνανται να αξιοποιηθούν τόσο από τους/τις εκπαιδευτικούς όσο κι από τους/τις μαθητές/-τριες, δημιουργώντας ένα «υβριδικό περιβάλλον εργασίας», που λειτουργεί ως διδακτικό αποθετήριο και εμπλουτίζεται στο πλαίσιο της σύγχρονης και ασύγχρονης διδασκαλίας.
- Προσφέρεται η εύκολη πρόσβαση στο note, στα σχεδιαστικά εργαλεία των οθονών αφής, σε ποικίλους Ανοικτούς Εκπαιδευτικούς Πόρους / Open Educational Resources (ΑΕΠ / ΟΕΡ) που περιλαμβάνουν κατηγορίες όπως: Εκπαιδευτικά Παιχνίδια/Δυναμικός Χάρτης/Εφαρμογές Λογισμικού/AR-VR-MR Αντικείμενα /3D Αντικείμενα κ.ά. καθώς και στην εφαρμογή mozaBook (που είναι προεγκατεστημένη στο περιβάλλον windows των οθονών και μελλοντικά θα εμπλουτιστεί με τα διαδραστικά σχολικά βιβλία).
- Οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να προσαρμόσουν το υλικό διδασκαλίας τους ώστε να ανταποκρίνεται στη γνωστική ετοιμότητα και στις ανάγκες των μαθητών/-τριών, σε σχέση με την ηλικία τους και τους διαφορετικούς τύπους μάθησης (οπτικός, ακουστικός, κιναισθητικός), προσφέροντας υλικό σε διαφορετικές μορφές, με άξονα τη συμπερίληψη όλων καθώς και την εξατομικευμένη μάθηση. Παράλληλα, η χρήση ποικίλων διαδραστικών δραστηριοτήτων επιτρέπουν την άμεση ανατροφοδότηση και αξιολόγηση του επιπέδου κατανόησης του μαθήματος.
- Η λειτουργία «πολλαπλής αφής» των διαδραστικών οθονών δίνει στον/στην εκπαιδευτικό την ευκαιρία να σχεδιάσει και να ενσωματώσει στη διδασκαλία ομαδικές δραστηριότητες, που επιτρέπουν τη συνέργεια των μαθητών/-τριών, καλλιεργώντας δεξιότητες όπως της συνεργασίας και επικοινωνίας.
- Οι οθόνες αφής μπορούν να συνδεθούν με το Google Drive ή το OneDrive, με υπολογιστές, τάμπλετ και άλλες συσκευές, διευκολύνοντας τη μεταφορά και την κοινή χρήση πληροφοριών.
- Δίνεται η δυνατότητα της αντεστραμμένης διδασκαλίας και η λειτουργία της ανεστραμμένης τάξης.
- Δίνεται η δυνατότητα ένταξης της τεχνητής νοημοσύνης (TN) στη μαθησιακή διαδικασία.
- Διευκολύνεται η χρήση δυναμικών λογισμικών Μαθηματικών, εργαλείων γεωμετρικών κατασκευών, διαδραστικών ασκήσεων, βίντεο-ηχητικών, τρισδιάστατων μοντέλων, εγείροντας το ενδιαφέρον των μαθητών/-τριών και προάγοντας την αφομοίωση της ύλης.
- Τέλος, τα διαδραστικά συστήματα μάθησης υποστηρίζουν και επιταχύνουν τη διενέργεια του μαθήματος καθώς δεν απαιτούν συσκότιση της αίθουσας για να προβληθεί υλικό, έχουν ενσωματωμένα ηχεία και μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαισθητικά με την αφή. Το υλικό των Οδηγιών Διδασκαλίας είναι κατάλληλο για χρήση δια μέσου των διαδραστικών συστημάτων μάθησης. Επιπροσθέτως, τα συστήματα αυτά διαθέτουν την επιλογή της λειτουργίας τους ως ασπρόπινακες με πολλές επιπλέον δυνατότητες πέραν της απλής γραφής κειμένου (π.χ. λειτουργία screenshot της οθόνης και δυνατότητα γραφής σημειώσεων πάνω στο screenshot, αντιγραφή-επικόλληση μέρους των σημειώσεων κ.ά.).
- Το σύνολο των δυνατοτήτων του υλικού κάθε μοντέλου διαδραστικού συστήματος μάθησης μπορεί να αναζητηθεί στις εξής διευθύνσεις:
[Συχνές ερωτήσεις](#) Διαδραστικών Συστημάτων.
[Χρήσιμα αρχεία](#) Διαδραστικών Συστημάτων.

ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2025–2026

Η κατανομή των διδακτικών ωρών που προτείνεται είναι ενδεικτική. Μέσα σε αυτές τις ώρες περιλαμβάνεται ο χρόνος που θα χρειαστεί για ανακεφαλαιώσεις, γραπτές δοκιμασίες, εργασίες κ.λπ.

Στην αρχή της σχολικής χρονιάς είναι σκόπιμο να γίνει, για δύο (2) διδακτικές ώρες, μια αναφορά σε στοιχεία από τη Γεωμετρία της Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου και της Α' Λυκείου που θα χρησιμοποιηθούν στη Β' Λυκείου, όπως είναι η ισότητα τριγώνων, το άθροισμα γωνιών πολυγώνων, οι έννοιες και ιδιότητες των παραλληλογράμμων, οι σχέσεις μεταξύ τόξου και αντίστοιχης επίκεντρης και εγγεγραμμένης γωνίας, εφόσον αυτά θα χρησιμοποιηθούν αρκετές φορές (στην ομοιότητα τριγώνων, στο Πυθαγόρειο θεώρημα, στα κανονικά πολύγωνα και στη μέτρηση κύκλου).

Στο πλαίσιο του διδακτικού σχεδιασμού οι εκπαιδευτικοί, προκειμένου να αξιοποιήσουν τις προτεινόμενες **διαδικτυακές πηγές** από το διδακτικό υλικό ή/και τα διδακτικά βιβλία, να προβαίνουν σε επανέλεγχο της εγκυρότητάς τους, διότι ενδέχεται λόγω του δυναμικού τους χαρακτήρα ορισμένες από αυτές να είναι ανενεργές ή να οδηγούν σε διαφορετικό περιεχόμενο.

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ Τάξης ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ, ΜΟΥΣΙΚΟΥ, ΚΑΛΛΙΤΕΧΝΙΚΟΥ ΓΕΛ

Κεφάλαιο 7^ο (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Στο κεφάλαιο αυτό γίνεται πρώτη φορά λόγος για σύμμετρα και ασύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα. Η έννοια της ασυμμετρίας μπορεί να βοηθήσει σημαντικά τους/τις μαθητές/-τριες να ξεκαθαρίσουν την έννοια του αρρήτου αριθμού. Για την κατανόηση της έννοιας του λόγου μεγεθών, προτείνεται να αξιοποιηθούν παραδείγματα στα οποία ζεύγη ευθυγράμμων τμημάτων διαφορετικών μηκών έχουν τον ίδιο λόγο. Επίσης, προτείνεται να γίνει σύντομη αναφορά στις ιδιότητες των αναλογιών.

Στο κεφάλαιο αυτό προτείνεται να δοθεί έμφαση στο Θεώρημα του Θαλή. Επιδιώκεται οι μαθητές/-τριες να μπορούν να εφαρμόζουν το Θεώρημα του Θαλή, σε δοσμένα σχήματα, ή σε σχήματα που χρειάζεται να σχεδιαστούν βοηθητικές ευθείες. Να αναδειχθούν οι εφαρμογές του Θεωρήματος σε τρίγωνα και τραπέζια. Αν το επιτρέπει ο διαθέσιμος χρόνος, να γίνει απόδειξη του Θεωρήματος του Θαλή, για συγκεκριμένο λόγο (π.χ. $\frac{3}{4}$) και να αναφερθεί ότι γενικεύεται σε οποιουδήποτε ρητούς.

Προτείνεται να γίνει το πρόβλημα 1 της παραγράφου 7.7 (**κατασκευή 4^{ης} αναλόγου**) και να δοθεί έμφαση στις ερωτήσεις κατανόησης 1-3 και στις ασκήσεις εμπέδωσης 3-7 της ως άνω παραγράφου.

Στο Κεφάλαιο 7 δε θα γίνουν αποδεικτικές ασκήσεις, σύνθετα θέματα καθώς και οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού.

Κεφάλαιο 8^ο (Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες).

Να δοθεί έμφαση στα κριτήρια ομοιότητας τριγώνων. Επιδιώκεται να κατανοήσουν οι μαθητές/-τριες τη λειτουργία των κριτηρίων ομοιότητας που, όπως και τα κριτήρια ισότητας, με λιγότερες προϋποθέσεις από τον ορισμό, μας επιτρέπουν να αποφανθούμε για την ομοιότητα δύο τριγώνων. Ωστόσο, χρειάζεται να αναδειχθούν οι διαφορές μεταξύ ομοιότητας και ισότητας τριγώνων.

Η αξιοποίηση της ομοιότητας στον υπολογισμό μηκών είναι σημαντικό να συνδεθεί με προβλήματα, όπως οι ασκήσεις εμπέδωσης 3 και 4 της §8.2.

Η εφαρμογή 4 της παραγράφου 8.2 θα χρειαστεί στη συνέχεια για να αποδειχθεί τύπος (iii) της παραγράφου 10.4, για το εμβαδόν τριγώνου. Με αφορμή αυτή την εφαρμογή είναι σκόπιμο να ξαναγίνει μια συζήτηση για τις σχέσεις τόξων, επίκεντρων και εγγεγραμμένων γωνιών και των σχετικών πορισμάτων (π.χ. ότι η εγγεγραμμένη γωνία σε ημικύκλιο είναι ορθή).

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές $AB = 2$, $AG = 4$ και γωνία $\hat{A} = 60^\circ$. Να κατασκευάσετε τρίγωνα όμοια προς το ΑΒΓ με λόγο ομοιότητας 1, 2 και $\frac{1}{2}$.

Στο Κεφάλαιο 8 δε θα γίνουν αποδεικτικές ασκήσεις, σύνθετα θέματα καθώς και οι γενικές ασκήσεις του κεφαλαίου αυτού.

Κεφάλαιο 9° (Προτείνεται να διατεθούν 8 διδακτικές ώρες)

§9.1-9.3 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)

Στόχοι της διδασκαλίας είναι οι μαθητές/-τριες:

- ✓ Να μπορούν να σχεδιάζουν ορθές προβολές και να αναγνωρίζουν ευθύγραμμα τμήματα ως προβολές άλλων ευθυγράμμων τμημάτων.
- ✓ Να ερμηνεύουν τις μετρικές σχέσεις με προβολές της § 9.2 ως αποτέλεσμα ομοιότητας τριγώνων και να τις χρησιμοποιούν σε επίλυση προβλημάτων.
- ✓ Να εφαρμόζουν το Πυθαγόρειο Θεώρημα και το αντίστροφό του στην επίλυση προβλημάτων.

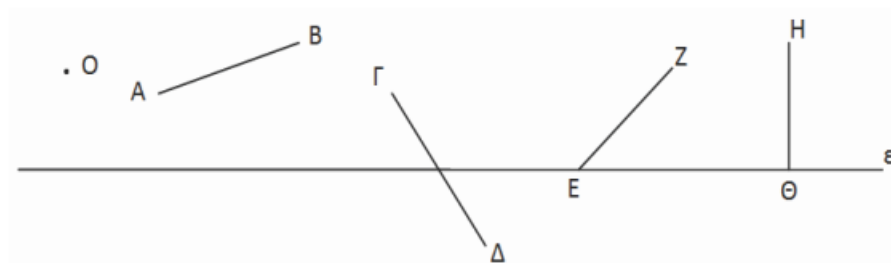
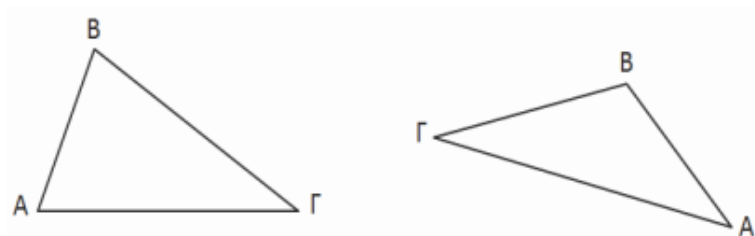
Στις παραγράφους αυτές η συνεχής και αποκλειστική ενασχόληση με ασκήσεις αλγεβρικού χαρακτήρα δε συνεισφέρει στην κατανόηση της Γεωμετρίας.

- Το σχόλιο της εφαρμογής 1 της §9.2 μπορεί να αξιοποιηθεί ως σύνδεση με την επόμενη παράγραφο.
- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα.

Στην παράγραφο 9.3 είναι σκόπιμο να διατεθεί χρόνος ώστε να σχολιαστεί το ιστορικό σημείωμα για την ανακάλυψη των ασύμμετρων μεγεθών και να γίνουν και οι τρεις κατασκευές (υποτείνουσα και κάθετη πλευρά ορθογωνίου τριγώνου, μέση ανάλογος, άρρητα πολλαπλάσια ευθύγραμμου τμήματος που δίνουν και τον τρόπο κατασκευής ευθυγράμμων τμημάτων με μήκος τετραγωνική ρίζα φυσικού – αφορμή για μία σύντομη συζήτηση για τη δυνατότητα κατασκευής ή μη των αρρήτων).

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

στα δύο παρακάτω σχήματα.

 (α)  (β)

Το πρόβλημα 3 προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με το μικροπείραμα «Κατασκευή ασύμμετρων τμημάτων (Η σπείρα του Κυρηναίου)» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την γεωμετρική κατασκευή ασύμμετρων ευθυγράμμων τμημάτων.

[illegible]

[Σχετική με τις μετρικές σχέσεις της παραγράφου 9.2]

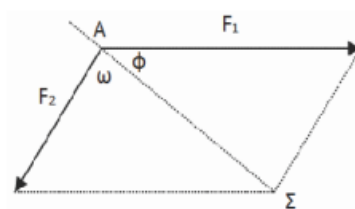
§9.4 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).

Στόχοι είναι οι μαθητές/-τριες να χρησιμοποιούν το Πυθαγόρειο και το Γενικευμένο Πυθαγόρειο Θεώρημα για να διακρίνουν αν ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο και να χρησιμοποιούν αυτά τα Θεωρήματα και τον νόμο των συνημιτόνων σε επίλυση προβλημάτων.

- Προτείνεται να μην αναλωθεί επιπλέον διδακτικός χρόνος για επίλυση ασκήσεων αλγεβρικού τύπου, όπως οι αποδεικτικές ασκήσεις 2-5.
- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα, ούτε οι γενικές ασκήσεις του Κεφαλαίου.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Ένα πλοίο κινείται με κατεύθυνση από το Α προς το Σ. Από τη στιγμή που βρίσκεται στη θέση Α και μέχρι την ολοκλήρωση της πορείας του, ασκούνται σε αυτό πλαγιομετωπικοί άνεμοι που το ωθούν με δύναμη μέτρου F_1 που σχηματίζει γωνία ω με την επιθυμητή πορεία πλευσης. Ο καπετάνιος, προκειμένου να διατηρήσει σταθερή την πορεία, δίνει εντολή να στραφεί το πηδάλιο κατά ϕ μοίρες. Αν οι προπέλες ωθούν το πλοίο με σταθερή δύναμη μέτρου F_1 μπορείτε να περιγράψετε έναν τρόπο με τον οποίο μπορεί να προσδιοριστεί η γωνία ϕ ;



Κεφάλαιο 10° (Προτείνεται να διατεθούν 10 διδακτικές ώρες).

§10.1-10.3 (Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

- Η έννοια του εμβαδού και οι τύποι υπολογισμού εμβαδών έχουν συζητηθεί στο Γυμνάσιο και στο Δημοτικό. Εδώ, μεταξύ άλλων, επιδιώκεται οι μαθητές/-τριες να έρθουν σε επαφή με τις αποδείξεις αυτών των τύπων, να μπορούν να διακρίνουν τα ισοδύναμα (ισεμβαδικά) από τα ίσα σχήματα και να υπολογίζουν εμβαδά χρησιμοποιώντας άλλα εμβαδά (ήδη γνωστά τους), κατάλληλους μετασχηματισμούς και βοηθητικές γραμμές. Προτείνεται, αν υπάρχει χρόνος, να γίνουν οι 3 εφαρμογές (με την παρατήρηση της εφαρμογής 2) και οι 2 δραστηριότητες.
- Θα μπορούσε να γίνει η απόδειξη του Πυθαγορείου θεωρήματος μέσω εμβαδών, όπως παρατίθεται στα στοιχεία του Ευκλείδη και αναφέρεται στο ιστορικό σημείωμα στο τέλος του Κεφαλαίου.
- Προτεινόμενες ασκήσεις: Οι ερωτήσεις κατανόησης, οι ασκήσεις εμπέδωσης 3 και 6 και οι αποδεικτικές ασκήσεις 1, 4, 7 και 8.
- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα.

Ενδεικτική δραστηριότητα 1:

(α) Να χωρίσετε ένα τρίγωνο σε τέσσερα ίσα τρίγωνα φέρνοντας κατάλληλες ευθείες και στη συνέχεια να συγκρίνετε το εμβαδόν κάθε τριγώνου με το εμβαδόν του αρχικού.

(β) Να χωρίσετε ένα παραλληλόγραμμο σε

- δύο,

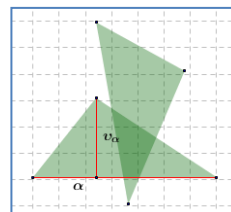
- τρία,
- τέσσερα ίσα παραλληλόγραμμα.

Στη συνέχεια να συγκρίνετε το εμβαδόν κάθε παραλληλογράμμου με το εμβαδόν του αρχικού παραλληλογράμμου.

(γ) Να χωρίσετε ένα τρίγωνο με ευθεία που διέρχεται από την κορυφή σε δύο τρίγωνα με λόγο εμβαδών $\frac{1}{3}$.

Ενδεικτική δραστηριότητα 2:

Η ερώτηση κατανόησης 1 προτείνεται να γίνει με πιο διερευνητικό τρόπο με το μικροπείραμα «Τύποι υπολογισμού εμβαδών» από τα εμπλουτισμένα σχολικά βιβλία, για την κατανόηση των τύπων των εμβαδών βασικών γεωμετρικών σχημάτων και τις αποδείξεις τους.



<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5771>

§10.4 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

Προτείνεται να γίνει απλή εφαρμογή των τύπων με στόχο οι μαθητές/-τριες να μπορούν να λύνουν απλά προβλήματα υπολογισμού εμβαδών, με τους τύπους αυτούς. Μία επιλογή ασκήσεων θα μπορούσε να είναι: οι ερωτήσεις κατανόησης 1 και 2, οι ασκήσεις εμπέδωσης 3 και 4 και οι αποδεικτικές ασκήσεις 1, 3 και 5.

- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα.

§10.5 (Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).

Στόχος είναι οι μαθητές/-τριες να συσχετίσουν το λόγο ομοιότητας δύο σχημάτων με το λόγο των περιμέτρων τους και το λόγο των εμβαδών τους.

- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα.

Κεφάλαιο 11° (Προτείνεται να διατεθούν 9 διδακτικές ώρες).

§11.1-11.2 (Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

Στόχοι είναι οι μαθητές/-τριες να αναγνωρίζουν τα κανονικά πολύγωνα, να διακρίνουν τη γωνία τους, από την κεντρική τους γωνία και να μπορούν να υπολογίζουν στοιχεία κανονικών πολυγώνων. Δεν κρίνεται σκόπιμο να χρησιμοποιούν έτοιμους τους τύπους του θεωρήματος I της παραγράφου 11.2.

Μπορεί να γίνει μία αναφορά στο ρόλο των κανονικών πολυγώνων στη φύση, την τέχνη και τις επιστήμες. Για παράδειγμα, θα είχε ενδιαφέρον η διερεύνηση θεμάτων σχετικών με την πλακόστρωση δαπέδου με κανονικά πολύγωνα (<http://photodentro.edu.gr/v/item/ds/8521/5881>).

Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Ο ρόμβος και το ορθογώνιο είναι κανονικά πολύγωνα; Τι πρέπει να ισχύει για να είναι;

§11.4, 11.5, 11.6, 11.7 (Προτείνεται να διατεθούν 7 διδακτικές ώρες).

Οι παράγραφοι αυτές μπορούν να εισαγάγουν τους/τις μαθητές/-τριες στις άπειρες διαδικασίες με φυσιολογικό τρόπο. Για αυτό, προτείνεται να αφιερωθεί χρόνος για τη διαδικασία προσέγγισης τόσο για τον υπολογισμό του μήκους του κύκλου όσο και για τον υπολογισμό του εμβαδού του.

Στόχοι είναι οι μαθητές/-τριες:

- ✓ Να περιγράφουν και να ερμηνεύουν τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται το μήκος και το εμβαδόν του κύκλου.
 - ✓ Να υπολογίζουν το μήκος τόξου και το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα ως συνάρτηση της ακτίνας.
 - ✓ Να αξιοποιούν τα παραπάνω συμπεράσματα για να επιλύουν προβλήματα με μεικτόγραμμα σχήματα.
- Να μη γίνουν τα σύνθετα θέματα.

Ενδεικτική δραστηριότητα:

Να σχεδιάσετε κύκλο με κέντρο O και ακτίνα 4. Στη συνέχεια να κατασκευάσετε το κανονικό εγγεγραμμένο και το κανονικό περιγεγραμμένο τετράγωνο στον κύκλο.

α) Να βρείτε τις περιμέτρους των δύο τετραγώνων.

β) Τι συμπεραίνετε για το μήκος του κύκλου;

γ) Μπορείτε να βρείτε ακριβέστερο τρόπο προσέγγισης του μήκους του κύκλου; Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας με αριθμητικά αποτελέσματα.

[Σχόλιο: Αυτή η δραστηριότητα είναι εισαγωγική στην παράγραφο 11.4 και μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια λογισμικού δυναμικής γεωμετρίας. Επίσης μπορεί να επεκταθεί και στην προσέγγιση εμβαδού κύκλου με κατάλληλη τροποποίηση των ερωτημάτων.]

ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ Β΄ Τάξης ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ, ΕΚΚΛΗΣΙΑΣΤΙΚΟΥ ΓΕΛ

Η διαχείριση της ύλης είναι αυτή που προτείνεται για την Β΄ τάξη Ημερησίου ΓΕΛ με την ακόλουθη διαφοροποίηση ως προς τις ώρες διδασκαλίας ανά κεφάλαιο.

Για την αναφορά σε στοιχεία από τη Γεωμετρία της Β΄ και Γ΄ Γυμνασίου και της Α' Λυκείου να διατεθεί 1 διδακτική ώρα

Κεφάλαιο 7ο

(Προτείνεται να διατεθούν 3 διδακτικές ώρες).

Κεφάλαιο 8ο

(Προτείνεται να διατεθούν 2 διδακτικές ώρες).

Κεφάλαιο 9ο

(Προτείνεται να διατεθούν 4 διδακτικές ώρες)

Κεφάλαιο 10ο

(Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες).

Κεφάλαιο 11ο

(Προτείνεται να διατεθούν 6 διδακτικές ώρες).

Για την προσαρμογή της διδασκαλίας στο διατιθέμενο χρόνο, προτείνεται να δίδεται έμφαση στα βασικά παραδείγματα - εφαρμογές και στην ανάδειξη, μέσω αυτών, του περιεχομένου (εννοιών και μεθόδων) της κάθε παραγράφου.

ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗΣ

Η εγκατάσταση των Διαδραστικών Συστημάτων Μάθησης στα σχολεία προσφέρει πολυάριθμα πλεονεκτήματα στο σχεδιασμό και στην ανάπτυξη της διδασκαλίας. Συγκεκριμένα:

- Παρέχεται η δυνατότητα οργάνωσης, καταγραφής και αποθήκευσης μαθημάτων που δύνανται να αξιοποιηθούν τόσο από τους/τις εκπαιδευτικούς όσο κι από τους/τις μαθητές/-τριες, δημιουργώντας ένα «υβριδικό περιβάλλον εργασίας», που λειτουργεί ως διδακτικό αποθετήριο και εμπλουτίζεται στο πλαίσιο της σύγχρονης και ασύγχρονης διδασκαλίας.
- Προσφέρεται η εύκολη πρόσβαση στο note, στα σχεδιαστικά εργαλεία των οθονών αφής, σε ποικίλους Ανοικτούς Εκπαιδευτικούς Πόρους / Open Educational Resources (ΑΕΠ / OER) που περιλαμβάνουν κατηγορίες όπως: Εκπαιδευτικά Παιχνίδια/Δυναμικός Χάρτης/Εφαρμογές Λογισμικού/AR-VR-MR Αντικείμενα /3D Αντικείμενα κ.ά. καθώς και στην εφαρμογή mozaBook (που είναι προεγκατεστημένη στο περιβάλλον windows των οθονών και μελλοντικά θα εμπλουτιστεί με τα διαδραστικά σχολικά βιβλία).
- Οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να προσαρμόσουν το υλικό διδασκαλίας τους ώστε να ανταποκρίνεται στη γνωστική ετοιμότητα και στις ανάγκες των μαθητών/-τριών, σε σχέση με την ηλικία τους και τους διαφορετικούς τύπους μάθησης (οπτικός, ακουστικός, κιναισθητικός), προσφέροντας υλικό σε διαφορετικές μορφές, με άξονα τη συμπερίληψη όλων καθώς και την εξατομικευμένη μάθηση. Παράλληλα, η χρήση ποικίλων διαδραστικών δραστηριοτήτων επιτρέπουν την άμεση ανατροφοδότηση και αξιολόγηση του επιπέδου κατανόησης του μαθήματος.
- Η λειτουργία «πολλαπλής αφής» των διαδραστικών οθονών δίνει στον/στην εκπαιδευτικό την ευκαιρία να σχεδιάσει και να ενσωματώσει στη διδασκαλία ομαδικές δραστηριότητες, που επιτρέπουν τη συνέργεια των μαθητών/-τριών, καλλιεργώντας δεξιότητες όπως της συνεργασίας και επικοινωνίας.
- Οι οθόνες αφής μπορούν να συνδεθούν με το Google Drive ή το OneDrive, με υπολογιστές, τάμπλετ και άλλες συσκευές, διευκολύνοντας τη μεταφορά και την κοινή χρήση πληροφοριών.
- Δίνεται η δυνατότητα της αντεστραμμένης διδασκαλίας και η λειτουργία της ανεστραμμένης τάξης.

- Δίνεται η δυνατότητα ένταξης της τεχνητής νοημοσύνης (TN) στη μαθησιακή διαδικασία.
- Διευκολύνεται η χρήση δυναμικών λογισμικών Μαθηματικών, εργαλείων γεωμετρικών κατασκευών, διαδραστικών ασκήσεων, βίντεο-ηχητικών, τρισδιάστατων μοντέλων, εγείροντας το ενδιαφέρον των μαθητών/-τριών και προάγοντας την αφομοίωση της ύλης.
- Τέλος, τα διαδραστικά συστήματα μάθησης υποστηρίζουν και επιταχύνουν τη διενέργεια του μαθήματος καθώς δεν απαιτούν συσκότιση της αίθουσας για να προβληθεί υλικό, έχουν ενσωματωμένα ηχεία και μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαισθητικά με την αφή. Το υλικό των Οδηγιών Διδασκαλίας είναι κατάλληλο για χρήση δια μέσου των διαδραστικών συστημάτων μάθησης. Επιπροσθέτως, τα συστήματα αυτά διαθέτουν την επιλογή της λειτουργίας τους ως ασπρόπινακες με πολλές επιπλέον δυνατότητες πέραν της απλής γραφής κειμένου (π.χ. λειτουργία screenshot της οθόνης και δυνατότητα γραφής σημειώσεων πάνω στο screenshot, αντιγραφή-επικόλληση μέρους των σημειώσεων κ.ά.).
- Το σύνολο των δυνατοτήτων του υλικού κάθε μοντέλου διαδραστικού συστήματος μάθησης μπορεί να αναζητηθεί στις εξής διευθύνσεις:
[Συχνές ερωτήσεις](#) Διαδραστικών Συστημάτων.
[Χρήσιμα αρχεία](#) Διαδραστικών Συστημάτων.