



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ  
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ  
ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

THEONI KANELLOPOULOU  
18.09.2024 13:55:21

ΓΕΝΙΚΗ ΓΡΑΜΜΑΤΕΙΑ Π/ΘΜΙΑΣ, Δ/ΘΜΙΑΣ  
ΕΚΠ/ΣΗΣ ΚΑΙ ΕΙΔΙΚΗΣ ΑΓΩΓΗΣ  
ΓΕΝΙΚΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ  
Π/ΘΜΙΑΣ ΚΑΙ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΣΠΟΥΔΩΝ, ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΚΑΙ  
ΟΡΓΑΝΩΣΗΣ Δ/ΘΜΙΑΣ ΕΚΠ/ΣΗΣ  
ΤΜΗΜΑ Α΄

Ταχ. Δ/ση: Ανδρέα Παπανδρέου 37  
Τ.Κ. – Πόλη: 15180 Μαρούσι  
Ιστοσελίδα: [www.minedu.gov.gr](http://www.minedu.gov.gr)  
Πληροφορίες: Θ. Κανελλοπούλου  
Α. Λάζος  
Τηλέφωνο: 210-3443422  
210-3442214

Βαθμός Ασφαλείας:  
Να διατηρηθεί μέχρι:  
Βαθ. Προτεραιότητας:

Αθήνα, 18-09-2024  
Αρ. Πρωτ. 106696/Δ2

ΠΡΟΣ:

- Περιφερειακές Δ/νσεις Εκπ/σης
- Διευθύνσεις Δ/θμιας Εκπ/σης
- Συμβούλους Εκπ/σης (μέσω των Δ/νσεων Δ/θμιας Εκπ/σης)
- Ημερήσια και Εσπερινά ΓΕ.Λ. (μέσω των Δ/νσεων Δ/θμιας Εκπ/σης)

ΚΟΙΝ.:

Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής  
[info@iep.edu.gr](mailto:info@iep.edu.gr)

**ΘΕΜΑ: Οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθημάτων των Μαθηματικών Γενικής Παιδείας (το διδάσκονται οι μαθητές που επιλέγουν την Ομάδα Προσανατολισμού Ανθρωπιστικών Σπουδών) και των Μαθηματικών Ομάδων Προσανατολισμού (Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Υγείας και Ομάδας Προσανατολισμού Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής) της Γ΄ τάξης του Ημερήσιου και του Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2024-2025**

Σχετ.: Τα με αρ. πρωτ. εισ. Υ.ΠΑΙ.Θ.Α. 95757/ΓΔ4/27-08-2024 και 96007/ΓΔ4/28-08-2024 έγγραφα

Μετά από σχετική εισήγηση του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής (πράξη 47/22-08-2024 του Δ.Σ. – Ανακοίνωση στο ορθό 28-08-2024) σας διαβιβάζουμε αρχεία με τις οδηγίες για τη διδασκαλία των μαθημάτων των Μαθηματικών Γενικής Παιδείας (το διδάσκονται οι μαθητές που επιλέγουν την Ομάδα Προσανατολισμού Ανθρωπιστικών Σπουδών) και των Μαθηματικών Ομάδων Προσανατολισμού (Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Υγείας και Ομάδας Προσανατολισμού Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής) της Γ΄ τάξης του Ημερήσιου και του Εσπερινού Γενικού Λυκείου για το σχολικό έτος 2024-2025.

**Οι διδάσκοντες/ουσες να ενημερωθούν ενυπόγραφα.**

Η ΥΦΥΠΟΥΡΓΟΣ  
ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ ΚΑΙ  
ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ

Συν.: Δύο (2) ηλεκτρονικά αρχεία

Εσωτ. Διανομή

- Γραφείο Υφυπουργού κ. Ζέττα Μ. Μακρή
- Γραφείο Γενικού Γραμματέα ΠΕ, ΔΕ & Ειδικής Αγωγής
- Δ/ση Σπουδών, Προγρ/των & Οργάνωσης Δ.Ε., Τμ. Α΄
- Δ/ση Παιδείας, Ομογ., Διαπ. Εκπ/σης, Ευρ. και Μειον. Σχολείων
- Διεύθυνση Θρησκευτικής Εκπ/σης & Διαθρ. Σχέσεων
- Δ/ση Ειδικής Αγωγής και Εκπ/σης
- Αυτ. Διεύθυνση Ιδιωτικής Εκπ/σης
- Αυτ. Τμήμα Πρότυπων και Πειραματικών Σχολείων

ΖΕΤΤΑ Μ. ΜΑΚΡΗ

ΑΚΡΙΒΕΣ ΑΝΤΙΓΡΑΦΟ

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2024–2025**

**Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ τάξης Ημερησίου, Μουσικού, Καλλιτεχνικού,  
Εκκλησιαστικού Γενικού Λυκείου**

Το μάθημα των Μαθηματικών Γενικής Παιδείας της Γ΄ Λυκείου περιλαμβάνει τα Στοχαστικά Μαθηματικά (Στατιστική - Πιθανότητες). Η διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών έχει ως στόχους αφενός τη γνωριμία των μαθητών/μαθητριών με στοιχεία απαραίτητα για την κατανόηση και την ερμηνεία καταστάσεων που συναντά ο σύγχρονος πολίτης, και αφετέρου την εμπλοκή τους με μη αιτιοκρατικούς τρόπους σκέψης για προβλήματα και καταστάσεις που εμπεριέχουν κάποιο βαθμό αβεβαιότητας. Το Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος έχει δημοσιευθεί στο ΦΕΚ 3027/τ. Β΄/21-7-2020 και η διδακτέα ύλη περιλαμβάνει όλα τα κεφάλαια.

Είναι επιθυμητό η διδασκαλία του μαθήματος να γίνεται με την εμπλοκή των μαθητών/μαθητριών σε έργα και προβλήματα μέσα στην τάξη, είτε σε ομάδες εργασίας, είτε ατομικά, είτε με συζήτηση σε όλη την τάξη. Με στόχο τον περιορισμό του φόρτου εργασίας των μαθητών/μαθητριών εκτός τάξης, οι εργασίες για το σπίτι θα πρέπει να εστιάζουν στο περιεχόμενο και στους στόχους τους μαθήματος. Μια τέτοια προσέγγιση δίνει περισσότερες ευκαιρίες σε όλους τους/τις μαθητές/μαθήτριες να εμπλακούν λύνοντας προβλήματα και συζητώντας καταστάσεις και φαινόμενα. Το περιεχόμενο και η δομή του σχολικού βιβλίου υποστηρίζει μια τέτοια προσέγγιση της διδασκαλίας.

Τα προβλήματα και ερωτήματα που τίθενται στη «Διερεύνηση» προτείνεται να χρησιμοποιούνται για να εισαχθούν οι «Βασικές έννοιες – Ιδέες – Διεργασίες» μέσα από τις δραστηριότητες των μαθητών/μαθητριών στην τάξη. Τα προβλήματα της «Διερεύνησης» έχουν διαμορφωθεί για τη συζήτηση στην τάξη, με τον/την εκπαιδευτικό να αναλαμβάνει περισσότερο να διευκολύνει τη συζήτηση παρά να «παραδώσει τη νέα θεωρία». Παρόλα αυτά σε κάποιες περιπτώσεις απαιτείται ο/η εκπαιδευτικός να αναλάβει περισσότερο καθοδηγητικό ρόλο (πχ. για να περιγράψει το θηκόγραμμα στην παράγραφο 2.3).

Οι ασκήσεις που υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο προτείνεται να αποτελέσουν αντικείμενο διαπραγμάτευσης στην τάξη. Το «Πρόσθετο Υλικό» μπορεί να αξιοποιηθεί είτε ως επιπλέον ασκήσεις, είτε για την εκπόνηση κάποιας συλλογικής εργασίας. Σε κάποιες περιπτώσεις, στο Πρόσθετο Υλικό συμπεριλαμβάνονται ασκήσεις και υλικό που υπάρχει σε άλλα σχολικά βιβλία που μπορούν να βρεθούν και στο ψηφιακό σχολείο (<http://ebooks.edu.gr/new/allcourses.php>).

Επειδή δίνεται έμφαση στην κατανόηση, στην αξιοποίηση των εργαλείων της στατιστικής και των πιθανοτήτων και στην κριτική ερμηνεία των πιθανών συμπερασμάτων, η απομνημόνευση τύπων δεν είναι στόχος του μαθήματος. Έτσι, στο τέλος των οδηγιών παρέχεται ένα τυπολόγιο το οποίο θα δίνεται στους/στις μαθητές/μαθήτριες κατά την γραπτή εξέτασή τους.

**Κεφάλαιο 1. Πιθανότητες (προτείνεται να διατεθούν 15 ώρες)**

**§ 1.1 Πειράματα τύχης, δειγματικός χώρος και ενδεχόμενα (προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες)**

Η αβεβαιότητα που είναι εγγενής στα πειράματα τύχης, σε αντίθεση με τα αιτιοκρατικά πειράματα, είναι μια σημαντική και νέα ιδέα για τους/τις μαθητές/μαθήτριες. Από την καθημερινή ζωή και από παιχνίδια που η έκβασή τους είναι αβέβαιη, οι μαθητές/μαθήτριες αναμένεται να έχουν εμπειρίες που θα τους επιτρέψουν να έχουν μια διαισθητική προσέγγιση του μη αιτιοκρατικού πειράματος και της έννοιας της πιθανότητας. Η μετατροπή αυτών των διαισθητικών προσεγγίσεων σε μαθηματικές έννοιες και σχέσεις απαιτεί τη διερεύνηση των βασικών εννοιών και πράξεων των ενδεχομένων (ως συνόλων). Η υποστήριξη με παραδείγματα και με διαγράμματα Venn μπορεί να συμβάλλει στη σύνδεση των εννοιών με τη διαίσθηση. Εργαλεία, όπως το δενδροδιάγραμμα και ο πίνακας διπλής εισόδου, βοηθούν στη μοντελοποίηση ενός πειράματος τύχης και στην κατασκευή του δειγματικού χώρου. Σημαντική για την κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων είναι, επίσης, η μετάφραση των ενδεχομένων και των μεταξύ τους σχέσεων από τη φυσική γλώσσα στη γλώσσα των συνόλων και αντίστροφα.

### **§ 1.2 Πιθανότητες: Ορισμοί και Εφαρμογές (προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες)**

Ο κλασικός ορισμός της πιθανότητας προτείνεται να είναι η κατάληξη μιας διαισθητικής προσέγγισης του μέτρου βεβαιότητας για ενδεχόμενα που είναι ισοπίθανα. Οι μαθητές/μαθήτριες, από την καθημερινή τους εμπειρία, αναμένεται να μπορούν να απαντήσουν πόσο πιθανό είναι να έρθει ένα συγκεκριμένο αποτέλεσμα όταν ρίχνουμε ένα ζάρι ή όταν «στρίβουμε» ένα κέρμα. Αυτή η εμπειρία μπορεί να αξιοποιηθεί για να οδηγηθούν στον κλασικό ορισμό και στις άμεσες συνέπειές του. Ο αξιωματικός ορισμός είναι πιο αφηρημένος και γενικός και αναφέρεται και στην περίπτωση που τα ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα. Η ανάγκη ύπαρξης του αξιωματικού ορισμού μπορεί να προκύψει από πειράματα τύχης στα οποία τα ενδεχόμενα δεν είναι ισοπίθανα, όπως το «Παιχνίδι 3» της «Διερεύνησης» του βιβλίου, και από την ανάγκη μοντελοποίησης πολύπλοκων φαινομένων ως πειραμάτων τύχης. Σε αυτά αναδεικνύεται η ανάγκη να αποδοθεί πιθανότητα σε ενδεχόμενα, ώστε να απαντώνται ερωτήματα όπως «τι αναμένουμε ως πιθανότερο να συμβεί και πόσο;». Η σύγκριση και η συσχέτιση του κλασικού με τον αξιωματικό ορισμό είναι σημαντικό να γίνει, αναδεικνύοντας το διαφορετικό πλαίσιο στο οποίο μπορεί να εφαρμοστεί ο καθένας (περιπτώσεις ισοπίθανων και μη ισοπίθανων ενδεχομένων).

### **§ 1.3 Πιθανότητες και πράξεις με ενδεχόμενα (προτείνεται να διατεθούν 4 ώρες)**

Οι κανόνες λογισμού των πιθανοτήτων εισάγονται για πρώτη φορά και είναι σημαντικό να συνδέονται με τη διαίσθηση των μαθητών/μαθητριών αφενός μέσα από οικείες καταστάσεις και προβλήματα (όπως εκείνο της «Διερεύνησης») και αφετέρου μέσω των διαγραμμάτων Venn. Ο αποδείξεις συνδέουν ορισμούς και νόμους σε μια συνεκτική δομή. Οι ασκήσεις μπορούν να αναδεικνύουν την αξία των κανόνων, εφόσον περιγράφουν προβλήματα και καταστάσεις που προέρχονται από την καθημερινή ζωή και εμπειρία και από άλλες επιστήμες. Έτσι, δεν προτείνονται ασκήσεις που απαιτούν πολύπλοκους αλγεβρικούς χειρισμούς χωρίς νόημα για τη λύση και τη διερεύνηση προβλημάτων.

### **§ 1.4 Συνδυαστική και Πιθανότητες (προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες)**

Στα στοιχεία Συνδυαστικής αναφέρονται οι βασικές έννοιες που είναι απαραίτητες για την επίλυση προβλημάτων στα οποία τίθεται το ερώτημα «πόσα « ή με «πόσους τρόπους» και η απάντηση δεν μπορεί να δοθεί εύκολα με καταμέτρηση. Το σημαντικότερο εργαλείο για τη

λύση των προβλημάτων είναι η βασική αρχή απαρίθμησης, της οποίας άμεση εφαρμογή είναι ο υπολογισμός του πλήθους των συνδυασμών, των διατάξεων και των μεταθέσεων. Για αυτό είναι σημαντικό οι μαθητές/μαθήτριες να γνωρίζουν πώς αυτοί τύποι προκύπτουν από τη βασική αρχή απαρίθμησης, χωρίς να είναι απαραίτητη η απομνημόνευσή τους.

## **Κεφάλαιο 2. Στατιστική (προτείνεται να διατεθούν 32 ώρες)**

### **§ 2.1 Πληθυσμός - Δείγμα - Μεταβλητές (προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες)**

Η διδασκαλία της παραγράφου έχει ως στόχο την εισαγωγή των βασικών εννοιών της Στατιστικής ως επιστήμης που ασχολείται με τη συλλογή δεδομένων, την παρουσίασή τους και την ανάλυση και εξαγωγή συμπερασμάτων. Η ύπαρξη μεγάλου όγκου δεδομένων και η αβεβαιότητα είναι δύο σημαντικά χαρακτηριστικά των προβλημάτων και των ερευνών της Στατιστικής.

Μέσα από παραδείγματα οι μαθητές/μαθήτριες αναμένεται να κατανοήσουν τη διάκριση μεταξύ πληθυσμού (απογραφή) και δείγματος (δειγματοληψία), μεταξύ μεταβλητής και τιμών της, μεταξύ ποιοτικής και ποσοτικής μεταβλητής, κ.λπ.

Ιδιαίτερα σε σχέση με την περίπτωση της δειγματοληψίας, συζητώντας ιστορικά παραδείγματα, θα πρέπει να επισημανθεί ότι το τυχαίο και αντιπροσωπευτικό δείγμα παίζει σημαντικό ρόλο στην ποιότητα της έρευνας και την άντληση συμπερασμάτων.

### **§ 2.2 Παρουσίαση Στατιστικών Δεδομένων (προτείνεται να διατεθούν 6 ώρες)**

Οι μαθητές/μαθήτριες θα πρέπει να μπορούν να κατασκευάζουν πίνακες συχνοτήτων και διαγράμματα, να μπορούν να τα «διαβάζουν» (όταν αυτά δίνονται) και να μπορούν να «μεταφράζουν» πίνακες σε διαγράμματα (ή κάποια μορφή διαγράμματος σε άλλη) και αντιστρόφως. Η χρήση ψηφιακών εργαλείων (π.χ. λογιστικό φύλλο) μπορεί να υποστηρίξει αυτή τη μετάφραση και γενικότερα την κατανόηση των στατιστικών εννοιών. Είναι σημαντικό οι μαθητές/μαθήτριες να διαπραγματευθούν δεδομένα με διαφορετικά χαρακτηριστικά: τιμές ποσοτικής αλλά και ποιοτικής μεταβλητής, μικρά αλλά και μεγάλα σύνολα δεδομένων, δεδομένα που χρειάζεται να ομαδοποιηθούν κ.λπ. Για λόγους συντομίας κατά την εργασία των μαθητών/μαθητριών στην τάξη, θα μπορούσαν να χρησιμοποιούνται αριθμομηχανές ή/και φωτοτυπίες.

Μία επιπλέον επιδίωξη είναι η καλλιέργεια της κριτικής ικανότητας των μαθητών/μαθητριών για τον κίνδυνο παρερμηνείας που υπάρχει από την ανάγνωση ενός στατιστικού διαγράμματος αλλά και από παραπλανητικούς τρόπους παρουσίασης στατιστικών δεδομένων.

Στην περίπτωση ομαδοποιημένων παρατηρήσεων ο αριθμός των κλάσεων θα πρέπει να δίνεται στους/στις μαθητές/μαθήτριες.

### **§ 2.3 Μέτρα θέσης και μεταβλητότητας, θηκόγραμμα, συντελεστής μεταβλητότητας (προτείνεται να διατεθούν 7 ώρες)**

Η διδασκαλία της παραγράφου εστιάζει στις έννοιες των συγκεκριμένων μέτρων θέσης (μέση τιμή, διάμεσος, τεταρτημόρια, επικρατούσα τιμή) και διασποράς (εύρος, ενδοτεταρτημοριακό εύρος, διακύμανση και τυπική απόκλιση). Χρειάζεται να γίνει συζήτηση για την επιλογή του μέτρου θέσης και του μέτρου διασποράς με τα οποία θα παρουσιαστούν συνοπτικά κάποια δεδομένα. Διαφορετικά μέτρα έχουν διαφορετικά πλεονεκτήματα. Για

παράδειγμα, συγκρίνοντας τα μέτρα θέσης, κάποια σημαντικά πλεονεκτήματα της μέσης τιμής είναι ότι για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούνται όλες οι τιμές και ότι έχει μεγάλη εφαρμογή σε περαιτέρω στατιστική ανάλυση. Πλεονεκτήματα της διαμέσου είναι ότι δεν επηρεάζεται από το μέγεθος των ακραίων τιμών και ότι ο υπολογισμός της είναι απλός. Ενώ για την επικρατούσα τιμή ένα σημαντικό πλεονέκτημα είναι ότι εφαρμόζεται και σε ποιοτικά δεδομένα.

Η σύγκριση δύο ομάδων δεδομένων μπορεί να στηρίζεται στα μέτρα θέσης και διασποράς, αλλά χρειάζεται κάθε φορά να λαμβάνεται υπόψη το πλαίσιο των δεδομένων, από τα οποία προέκυψαν τα μέτρα. Για παράδειγμα, μέτρα θέσης και διασποράς για δεδομένα βαθμών που βρίσκονται στην κλίμακα 0 – 20 αναμένεται να είναι διαφορετικά από τα αντίστοιχα μέτρα για δεδομένα βαθμών στην κλίμακα 0 – 100, ακόμα κι αν τα δεδομένα είναι τα ίδια και έχει γίνει αναγωγή από τη μία κλίμακα στην άλλη.

Το θηκόγραμμα είναι μια μορφή αναπαράστασης των δεδομένων που εμπεριέχει τα περισσότερα από τα μέτρα θέσης και διασποράς και για τον λόγο αυτό χρησιμοποιείται ευρέως στην παρουσίαση δεδομένων αλλά και στη σύγκριση διαφορετικών ομάδων δεδομένων. Η κατασκευή και η ερμηνεία θηκογραμμάτων είναι σημαντικά στοιχεία της διδασκαλίας της ενότητας.

Δίνοντας έμφαση στις έννοιες των μέτρων θέσης και διασποράς προτείνεται να μην ζητείται από τους/τις μαθητές/μαθήτριες η απομνημόνευση τύπων αλλά η επιλογή κατάλληλων μέτρων, η ερμηνεία και η κριτική προσέγγιση ερμηνειών.

Τέλος, μέσω διαφορετικών δειγμάτων του ίδιου πληθυσμού είναι σημαντικό να γίνει διάκριση μεταξύ του δειγματικού μέσου και του μέσου του πληθυσμού. Θα πρέπει να επισημανθεί ότι τον μέσο ενός δείγματος μπορούμε να τον υπολογίσουμε ενώ τον μέσο του πληθυσμού μπορούμε, μέσω του δείγματος, μόνο να τον εκτιμήσουμε. Το ίδιο ισχύει και για οποιαδήποτε άλλη δειγματική ποσότητα σε σχέση με την αντίστοιχη πληθυσμιακή (π.χ. τυπική απόκλιση).

#### **§ 2.4 Κανονική κατανομή και εφαρμογές (προτείνεται να διατεθούν 2 ώρες)**

Με την κανονική κατανομή μοντελοποιούνται διαδικασίες και φαινόμενα, αρκετά από τα οποία επηρεάζουν την καθημερινότητα του πολίτη. Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι με αυτό το μοντέλο μπορούμε να περιγράψουμε πώς κατανέμονται σε έναν ιδεατό, άπειρο πληθυσμό οι τιμές ορισμένων μεταβλητών. Στην πράξη, μπορούμε να χρησιμοποιούμε την κανονική κατανομή για να αντλούμε συμπεράσματα με κάποιο βαθμό βεβαιότητας για μεγάλα δείγματα (για παράδειγμα, ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου «η τιμή της μεταβλητής είναι στο διάστημα  $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ » ισούται κατά προσέγγιση με 0,68 ή 68%).

#### **§ 2.5 Πίνακες συνάφειας και ραβδογράμματα (προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες)**

Η πιθανή σύνδεση δύο ποιοτικών χαρακτηριστικών μελετάται με χρήση των πινάκων συνάφειας. Η ερμηνεία των πινάκων συνάφειας και των σχέσεων των δύο χαρακτηριστικών δεν μπορεί από μόνη της να οδηγεί σε σχέση αιτίου – αιτιατού, αν και μια τέτοια σχέση μπορεί να υπάρχει σε κάποιες περιπτώσεις. Τόσο τα ομαδοποιημένα, όσο και τα στοιβαγμένα ραβδογράμματα μπορούν να αξιοποιηθούν στην ανάδειξη και ερμηνεία συνδέσεων μεταξύ των χαρακτηριστικών.

## **§ 2.6 Σύγκριση ποσοτικών χαρακτηριστικών στις κατηγορίες ενός ποιοτικού χαρακτηριστικού (προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες)**

Τα ποσοτικά χαρακτηριστικά που συνδέονται είτε με δύο δείγματα (π.χ. εφαρμογή 1), είτε με δύο κατηγορικές μεταβλητές (π.χ. εφαρμογή 3) μπορούν να μελετηθούν αξιοποιώντας τα αντίστοιχα μέτρα θέσης και μεταβλητότητας και σχετικές αναπαραστάσεις (θηκογράμματα, άλλα γραφήματα, πίνακες). Σε κάθε περίπτωση, η έμφαση είναι στις ερμηνείες και στις συνδέσεις, οι οποίες και εδώ δεν εκφράζουν πάντα σχέσεις αιτίου – αιτιατού.

## **§ 2.7 Γραμμική συσχέτιση ποσοτικών μεταβλητών και διαγράμματα διασποράς (προτείνεται να διατεθούν 5 ώρες)**

Σε αρκετές περιπτώσεις, η συσχέτιση δύο ποσοτικών χαρακτηριστικών μπορεί να μελετηθεί μέσα από ένα διάγραμμα διασποράς. Η μελέτη που γίνεται σε αυτή την ενότητα αναφέρεται μόνο σε πιθανή γραμμική συσχέτιση. Η μη ύπαρξη γραμμικής συσχέτισης δεν σημαίνει ανυπαρξία συσχέτισης γενικώς (π.χ. θα μπορούσε να υπάρχει εκθετική ή τετραγωνική συσχέτιση).

Η γραμμική συσχέτιση μπορεί να φαίνεται από το διάγραμμα διασποράς, ή από τον συντελεστή Pearson. Ο τύπος για τον συντελεστή Pearson δίνεται για λόγους πληρότητας και δεν ζητείται η απομνημόνευσή του από τους/τις μαθητές/μαθήτριες. Η τιμή του συντελεστή  $r$  μπορεί να δίνεται έτοιμη, ή να υπολογίζεται μέσω λογισμικού, ή, σε κάποιες περιπτώσεις, ακόμη και να υπολογίζεται με χρήση αριθμομηχανής. Είναι σημαντική η σύνδεση της τιμής του  $r$  με τη μορφή του διαγράμματος διασποράς και η ανάπτυξη της ικανότητας οι μαθητές/μαθήτριες να κάνουν τέτοιες ερμηνείες.

Και πάλι, κρίνεται απαραίτητο να μην ερμηνευθεί η ύπαρξη συσχέτισης με όρους αιτίου – αιτιατού, εφόσον μπορεί να υπάρχει κάποιος τρίτος (συγχυτικός) παράγοντας.

Εφόσον φαίνεται να υπάρχει γραμμική συσχέτιση, είναι πιθανώς ενδιαφέρουσα η δημιουργία μιας ευθείας που μοντελοποιεί αυτή τη συσχέτιση. Αυτό συνδέεται κυρίως με την πραγματοποίηση προβλέψεων, οι οποίες μπορεί να γίνουν κάτω από κάποιες προϋποθέσεις. Οι στόχοι του παρόντος μαθήματος περιορίζουν τα μοντέλα γραμμικής συσχέτισης μόνο στην ευθεία που κατασκευάζεται με το μάτι και όχι σε περισσότερο πολύπλοκα.

## **Μαθηματικά Γενικής Παιδείας Γ΄ τάξης Εσπερινού Γενικού Λυκείου**

Οι οδηγίες διδασκαλίας για τα Μαθηματικά της Γ΄ τάξης του Εσπερινού Γενικού Λυκείου ταυτίζονται με εκείνες για του Ημερήσιου, με την απαραίτητη τροποποίηση των διατιθέμενων ωρών διδασκαλίας. Πιο συγκεκριμένα, οι ενδεικτικές ώρες διδασκαλίας κάθε παραγράφου προσαρμόζονται περίπου στο μισό των αντίστοιχων του Ημερήσιου Γενικού Λυκείου. Για αυτόν τον σκοπό, η διδασκαλία θα πρέπει να εστιάζει στη συζήτηση των βασικών προβλημάτων (Διερεύνηση) και της θεωρίας. Αν υπάρχει διαθέσιμος χρόνος, ο/η διδάσκων/διδάσκουσα θα επιλέξει τις επιπλέον εφαρμογές και ασκήσεις που θα συζητηθούν στην τάξη με κριτήριο τις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών/μαθητριών.

## ΒΑΣΙΚΟ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

(δίνεται στους/στις μαθητές/μαθήτριες κατά τη γραπτή εξέταση)

### Πιθανότητες:

—  $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0, 0 \leq P(A) \leq 1,$

— Αν  $A \cap B = \emptyset$ , τότε  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Κανόνες λογισμού πιθανοτήτων:

$P(A') = 1 - P(A)$	$P(A) = P(A \cap B) + P(A - B)$
Αν $B \subseteq A$ τότε $P(B) \leq P(A)$	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

— Συνδυαστική:

Διατάξεις των  $n$  ανά  $k$  με επαναλήψεις:  $n^k$

Διατάξεις των  $n$  ανά  $k$  χωρίς επαναλήψεις:  $(n)_k = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Μεταθέσεις των  $n$  στοιχείων:  $n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Συνδυασμοί των  $n$  ανά  $k$ :  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

### Στατιστική:

— Μέση τιμή  $\bar{x} = \frac{t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_v}{v}$  ή  $\bar{x} = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + \dots + x_k \cdot v_k}{v}$

— Ενδοτεταρτημοριακό εύρος:  $Q = Q_3 - Q_1$

— Ακραίες οι τιμές που βρίσκονται έξω από το διάστημα  $[Q_1 - 1,5 \cdot Q, Q_3 + 1,5 \cdot Q]$

— Διακύμανση:  $s^2 = \frac{(t_1 - \bar{x})^2 + (t_2 - \bar{x})^2 + (t_3 - \bar{x})^2 + \dots + (t_v - \bar{x})^2}{v}$

ή  $s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot v_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot v_2 + \dots + (x_k - \bar{x})^2 \cdot v_k}{v}$

— Τυπική απόκλιση  $s = \sqrt{s^2}$

— Συντελεστής μεταβλητότητας  $CV = \frac{s}{|\bar{x}|}$

— Κανονική κατανομή με μέση τιμή  $\mu$  και διασπορά  $\sigma$  (του πληθυσμού):

στο διάστημα	εκτιμούμε ότι βρίσκεται περίπου το
$(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$	68% των παρατηρήσεων
$(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$	95% των παρατηρήσεων
$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$	99,7% των παρατηρήσεων

— Συντελεστής γραμμικής συσχέτισης Pearson:  $r = \frac{\sum_{i=1}^v x_i y_i - v \bar{x} \bar{y}}{v s_x s_y}$

## ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗΣ

Η εγκατάσταση των Διαδραστικών Οθονών Αφής στα σχολεία προσφέρει πολυάριθμα πλεονεκτήματα στο σχεδιασμό και στην ανάπτυξη της διδασκαλίας. Συγκεκριμένα:

- Παρέχεται η δυνατότητα οργάνωσης, καταγραφής και αποθήκευσης μαθημάτων που δύνανται να αξιοποιηθούν τόσο από τους/τις εκπαιδευτικούς όσο κι από τους/τις μαθητές/-τριες.
- Προσφέρεται η εύκολη πρόσβαση στο note, στα σχεδιαστικά εργαλεία των οθονών αφής, σε ποικίλους Ανοικτούς Εκπαιδευτικούς Πόρους / Open Educational Resources (ΑΕΠ / OER) που περιλαμβάνουν κατηγορίες όπως: Εκπαιδευτικά Παιχνίδια/Δυναμικός Χάρτης/Εφαρμογές Λογισμικού/AR-VR-MR Αντικείμενα /3D Αντικείμενα κ.ά. καθώς και στην εφαρμογή μοzaBook (που είναι προεγκατεστημένη στο περιβάλλον windows των οθονών και μελλοντικά θα εμπλουτιστεί με τα διαδραστικά σχολικά βιβλία).
- Όλα τα παραπάνω αποτελούν καινοτόμα μαθησιακά περιβάλλοντα, εύχρηστα, με πλούσιο οπτικοακουστικό υλικό οικείου χαρακτήρα και εξοικείωσης με την καθημερινότητα των μαθητών/-τριών, που ανταποκρίνονται στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Επίσης, δίνουν στον/στην εκπαιδευτικό την ευκαιρία να οργανώσει το μάθημά του/της, δημιουργώντας ένα «υβριδικό περιβάλλον εργασίας», που λειτουργεί ως διδακτικό αποθετήριο και εμπλουτίζεται στο πλαίσιο της σύγχρονης και ασύγχρονης διδασκαλίας.
- Οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να προσαρμόσουν το υλικό διδασκαλίας τους ώστε να ανταποκρίνεται στη γνωστική ετοιμότητα και στις ανάγκες των μαθητών/-τριών, σε σχέση με την ηλικία τους και τους διαφορετικούς τύπους μάθησης (οπτικός, ακουστικός, κιναισθητικός), προσφέροντας υλικό σε διαφορετικές μορφές, με άξονα τη συμπερίληψη όλων καθώς και την εξατομικευμένη μάθηση. Παράλληλα, η χρήση ποικίλων διαδραστικών δραστηριοτήτων επιτρέπουν την άμεση ανατροφοδότηση και αξιολόγηση του επιπέδου κατανόησης του μαθήματος.
- Η λειτουργία «πολλαπλής αφής» των διαδραστικών οθονών δίνει στον/στην εκπαιδευτικό την ευκαιρία να σχεδιάσει και να ενσωματώσει στη διδασκαλία ομαδικές δραστηριότητες, που επιτρέπουν τη συνέργεια των μαθητών/-τριών, καλλιεργώντας δεξιότητες όπως της συνεργασίας και επικοινωνίας.
- Οι οθόνες αφής μπορούν να συνδεθούν με το Google Drive ή το OneDrive, με υπολογιστές, τάμπλετ και άλλες συσκευές, διευκολύνοντας τη μεταφορά και την κοινή χρήση πληροφοριών.
- Δίνεται η δυνατότητα στον/στην εκπαιδευτικό να μοιράζεται με τους/τις μαθητές/-τριες εκπαιδευτικό υλικό και να το επαναχρησιμοποιεί, μειώνοντας τον φόρτο εργασίας.
- Δίνεται η δυνατότητα της αντεστραμμένης διδασκαλίας και η λειτουργία της ανεστραμμένης τάξης.
- Δίνεται η δυνατότητα ένταξης της τεχνητής νοημοσύνης (TN) στη μαθησιακή διαδικασία.
- Τέλος, τα διαδραστικά συστήματα μάθησης διευκολύνουν και επιταχύνουν τη διενέργεια του μαθήματος καθώς δεν απαιτούν συσκότιση της αίθουσας για να προβληθεί υλικό, έχουν ενσωματωμένα ηχεία και μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαισθητικά με την αφή. Το σύνολο του υλικού των Οδηγών Διδασκαλίας είναι κατάλληλο για χρήση δια μέσου των διαδραστικών συστημάτων μάθησης. Επιπροσθέτως, τα συστήματα αυτά διαθέτουν την επιλογή της λειτουργίας τους ως ασπροπίνακες με πολλές επιπλέον δυνατότητες πέραν της



απλής γραφής κειμένου (π.χ. λειτουργία screenshot της οθόνης και δυνατότητα γραφής σημειώσεων πάνω στο screenshot, αντιγραφή-επικόλληση μέρους των σημειώσεων κ.ά.).

- Το σύνολο των δυνατοτήτων του υλικού κάθε μοντέλου διαδραστικού συστήματος μάθησης μπορεί να αναζητηθεί στις εξής διευθύνσεις:
  - [Συχνές ερωτήσεις](#) Διαδραστικών [Συστημάτων](#).
  - [Χρήσιμα αρχεία](#) Διαδραστικών Συστημάτων.

Για τη διδασκαλία των **Μαθηματικών**, οι διαδραστικές οθόνες αφής διευκολύνουν τη χρήση δυναμικών λογισμικών Μαθηματικών, εργαλείων γεωμετρικών κατασκευών, διαδραστικών ασκήσεων, βίντεο-ηχητικών, τρισδιάστατων μοντέλων, εγείροντας το ενδιαφέρον των μαθητών/-τριών και προάγοντας την αφομοίωση της ύλης.

**ΟΔΗΓΙΕΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΓΙΑ ΤΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2024–2025**

Για το σχολικό έτος 2024-2025 η ύλη των Μαθηματικών Προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου περιλαμβάνει τη θεματική της Ανάλυσης της οποίας η διδασκαλία καταλαμβάνει 6 ώρες την εβδομάδα. Οι διατιθέμενες ώρες διδασκαλίας επιτρέπουν την υποστήριξη γνωστικών και διδακτικών στόχων. Πιο συγκεκριμένα:

- α) την σύνδεση της Ανάλυσης με εφαρμογές και προβλήματα που σχετίζονται με την πραγματικότητα.
- β) την υποστήριξη της μεγάλης πλειονότητας των μαθητών/-τριών στο να εμπλακούν με τα Μαθηματικά ανεξάρτητα από τη μέχρι τώρα μαθησιακή πορεία τους.

Η μετατόπιση της διδασκαλίας προς τις διαδικασίες επίλυσης προβλήματος μπορεί να προσφέρει μια επιπλέον νοηματοδότηση των σχετικών εννοιών και διαδικασιών. Για την εμπλοκή των μαθητών/-τριών σε διαδικασίες μαθηματικής μοντελοποίησης και επίλυσης προβλήματος κρίνεται σκόπιμη καταρχάς η αξιοποίηση προβλημάτων από το υπάρχον διδακτικό υλικό (διδακτικό βιβλίο, υλικό και βιβλία αναρτημένα στο <http://ebooks.edu.gr>). Έχει ιδιαίτερη σημασία κατά τη διαπραγμάτευση των προβλημάτων να παρέχεται επαρκής χρόνος στους/στις μαθητές/-τριες και να αντιμετωπίζονται τυχόν γνωστικές ελλείψεις.

Η αντιμετώπιση γνωστικών ελλείψεων ορισμένων μαθητών/-τριών μπορεί να γίνεται με την ανάδειξη ενδομαθηματικών συνδέσεων εννοιών και διαδικασιών καθώς και την ανάκληση προηγούμενων γνώσεων. Αυτά αποτελούν σημαντικές ευκαιρίες αφενός επανασύνδεσης μαθητών/-τριών που κινδυνεύουν να χάσουν την επαφή με τα Μαθηματικά και αφετέρου βαθύτερης κατανόησης για όλους. Τέτοιες παρεμβάσεις μπορούν να γίνονται κατά την κρίση του/της διδάσκοντα/-ουσας, είτε ως θεωρητική συζήτηση (στις αρχικές παραγράφους συναρτήσεων, μονοτονίας, ακροτάτων κ.ά.), είτε ως παρεμβολή των αναγκαίων θεωρητικών στοιχείων για μια άσκηση.

Παράγραφος	Ελάχιστος αριθμός ωρών	Παράγραφος	Ελάχιστος αριθμός ωρών	Παράγραφος	Ελάχιστος αριθμός ωρών
1.1	3	2.1	8	3.1	4
1.2	10	2.2	4	3.4	5
1.3	10	2.3	5	3.5	7
1.4	3	2.4	5	3.7	10
1.5	6	2.5	4		
1.6	4	2.6	7		
1.7	4	2.7	12		
1.8	12	2.8	4		
		2.9	4		
		2.10	5		

## Κεφάλαιο 1ο

### §1.1

Το περιεχόμενο της παραγράφου αυτής είναι σημείο αναφοράς για τα επόμενα. Οι περισσότερες από τις έννοιες που περιέχονται είναι ήδη γνωστές στους/στις μαθητές/-τριες. Γι' αυτό η διδασκαλία δεν πρέπει να στοχεύει στην εξ υπαρχής αναλυτική παρουσίαση γνωστών εννοιών, αλλά στο να δίνει «αφορμές» στους/στις μαθητές/-τριες να ανατρέχουν στα βιβλία των προηγούμενων τάξεων και να επαναφέρουν στη μνήμη τους γνωστές έννοιες και προτάσεις που θα τις χρειαστούν στα επόμενα.

### §1.2

Προτείνεται να δοθεί έμφαση σε προβλήματα μαθηματικής μοντελοποίησης με κατασκευή συνάρτησης που περιγράφει ένα φαινόμενο ή μία κατάσταση, όπως για παράδειγμα οι ασκήσεις 5 της Α' Ομάδας και 2, 3 και 4 της Β' Ομάδας.

Η διδασκαλία της παραγράφου αυτής είναι μία ευκαιρία ανάκλησης/συμπλήρωσης προηγούμενων γνώσεων από οικείες συναρτήσεις (τριγωνομετρικές, πολυωνυμικές, εκθετικές, λογαριθμικές, κ.ά.) και των αντίστοιχων εξισώσεων και ανισώσεων. Επιπλέον, γεωμετρικές έννοιες και σχέσεις είναι χρήσιμο να συζητούνται με αφορμή σχετικά προβλήματα.

Η έννοια της συνάρτησης είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη γραφική της παράσταση και η σύνδεση αυτή πρέπει να αναδεικνύεται σε κάθε ευκαιρία, διότι υποστηρίζει την κατανόηση των χαρακτηριστικών της συνάρτησης.

Είναι σημαντικό να επισημανθεί ότι μπορεί το γινόμενο δύο συναρτήσεων να είναι η σταθερή συνάρτηση μηδέν χωρίς καμία από τις δύο να είναι ίση με την συνάρτηση μηδέν. Ένα κατάλληλο παράδειγμα αποτελούν οι συναρτήσεις  $f(x) = x + |x|$  και  $g(x) = x - |x|$  των οποίων συνιστάται να γίνει και η γραφική παράσταση.

Επίσης, να επισημανθεί ότι από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει ότι αν  $x_1, x_2 \in D_f$  και  $x_1 = x_2$  ισχύει πάντα  $f(x_1) = f(x_2)$ . Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει πάντα (ισχύει μόνο όταν η συνάρτηση είναι ένα προς ένα, όπως θα φανεί σε επόμενη παράγραφο).

Επιπλέον, είναι χρήσιμο να συζητηθεί ότι ο ορισμός της ισότητας συναρτήσεων δεν μπορεί να υποκατασταθεί με τον «Δύο συναρτήσεις  $f$  και  $g$  λέγονται ίσες όταν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού και τον ίδιο τύπο». Καταρχάς, δεν έχουν όλες οι συναρτήσεις τύπο. Αλλά δύο συναρτήσεις με διαφορετικό τύπο μπορεί να είναι ίσες, όπως για παράδειγμα οι ορισμένες στο  $\mathbb{R}$  συναρτήσεις  $f(x) = 1$  και  $g(x) = \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$ .

### §1.3

Για την αναγνώριση των ιδιοτήτων της μονοτονίας και του «ένα προς ένα» μιας συνάρτησης είναι σημαντικό να αξιοποιηθούν οι γραφικές παραστάσεις. Για τον σκοπό αυτό μπορούν να

αξιοποιηθούν οι γραφικές παραστάσεις των βασικών συναρτήσεων της προηγούμενης παραγράφου.

Να διευκρινιστεί στους/στις μαθητές/-τριες ότι για την επίλυση ασκήσεων μπορούν να χρησιμοποιούνται, αναπόδεικτα, οι προτάσεις:

- i) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει η συνεπαγωγή:  $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 < x_2$ .
- ii) Αν η συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε για οποιαδήποτε  $x_1, x_2 \in \Delta$  ισχύει η συνεπαγωγή:  $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 > x_2$ .

Για λόγους διδακτικούς μπορεί να παρουσιαστεί στην τάξη η απόδειξη αυτών των προτάσεων:

i) Έστω ότι υπάρχουν  $x_1, x_2 \in \Delta$ , για τα οποία ισχύει η υπόθεση και δεν ισχύει το συμπέρασμα της συνεπαγωγής. Τότε θα ισχύει:

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ και } x_1 \geq x_2.$$

- Αν ήταν  $x_1 > x_2$ , επειδή η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα, θα ίσχυε:  $f(x_1) > f(x_2)$ , που αντίκειται στην υπόθεση.
- Αν ήταν  $x_1 = x_2$ , από τον ορισμό της συνάρτησης, θα ίσχυε:  $f(x_1) = f(x_2)$ , που αντίκειται και αυτό στην υπόθεση.

Επομένως, ισχύει το ζητούμενο.

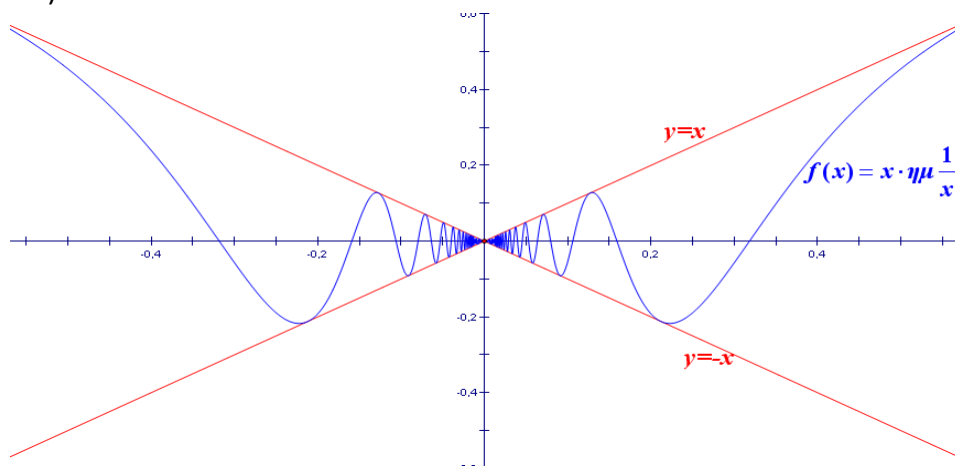
ii) Αντίστοιχη με την i.

#### §1.4

Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη, χρειάζεται να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορίου. Δηλαδή, να γίνει προσπάθεια, μέσα από γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, να αποκτήσουν οι μαθητές/-τριες μια καλή εικόνα και να αποφευχθούν παρανοήσεις, που από τη βιβλιογραφία έχει προκύψει ότι δημιουργούνται συχνά στους/στις μαθητές/-τριες, για την έννοια του ορίου. Να τονιστεί ιδιαίτερα, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, ότι η συμπεριφορά της συνάρτησης στο σημείο  $x_0$  δεν επηρεάζει το όριο της όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$ , καθώς και ότι η τιμή του  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  καθορίζεται από τις τιμές που παίρνει η συνάρτηση

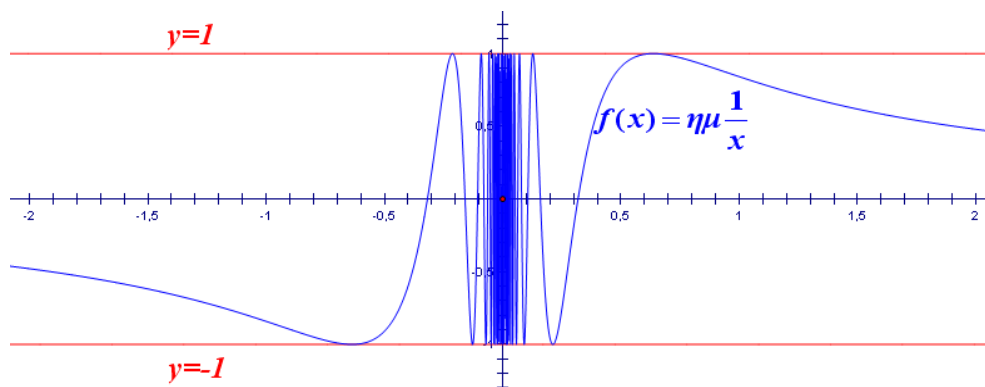
κοντά στο  $x_0$ . Δηλαδή, δύο συναρτήσεις που έχουν τις ίδιες τιμές σε ένα διάστημα γύρω από το  $x_0$ , αλλά μπορεί να διαφέρουν στο  $x_0$  (να παίρνουν διαφορετικές τιμές ή η μια να ορίζεται και η άλλη να μην ορίζεται ή καμία να μην ορίζεται), έχουν το ίδιο όριο όταν το  $x$  τείνει στο  $x_0$ . Να τονιστεί επίσης ότι, η ύπαρξη του ορίου δε συνεπάγεται μονοτονία (κάτι που όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία είναι συνηθισμένη παρανόηση των μαθητών/-τριών), ούτε όμως και τοπική μονοτονία δεξιά και αριστερά του  $x_0$ , δηλαδή μονοτονία σε ένα διάστημα αριστερά του  $x_0$  και σε ένα διάστημα δεξιά του  $x_0$ . Για τον σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθούν γραφικές παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, που θα

σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, όπως για παράδειγμα η  $f(x) = x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$  (Σχήμα 1).



Σχήμα 1

Επίσης, επειδή πολλοί/-ές μαθητές/-τριες θεωρούν ότι όταν ένα όριο δεν υπάρχει τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι διαφορετικά, να δοθούν γραφικά και να συζητηθούν παραδείγματα που δεν υπάρχουν τα πλευρικά όρια, όπως για παράδειγμα η  $f(x) = \eta\mu \frac{1}{x}$  (Σχήμα 2).



Σχήμα 2

### §1.5

Στην ενότητα αυτή δεν έχει νόημα μια άσκοπη ασκησιολογία που οι μαθητές/-τριες υπολογίζουν όρια, κάνοντας χρήση αλγεβρικών δεξιοτήτων. Στη λύση των ασκήσεων να ζητείται από τους/τις μαθητές/-τριες να τονίζουν τις ιδιότητες των ορίων που χρησιμοποιούν, ώστε οι ασκήσεις αυτές να αποκτούν ουσιαστικό περιεχόμενο από πλευράς Ανάλυσης, κάτι

που θα βοηθήσει στην ανάπτυξη της κατανόησης από τους/τις μαθητές/-τριες της έννοιας του ορίου.

Για παράδειγμα, σε ερωτήσεις όπως «να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$ » (άσκηση 3i, Α' Ομάδας) είναι

χρήσιμο να ζητείται από τους/τις μαθητές/-τριες να αιτιολογήσουν ποιες ιδιότητες των ορίων χρησιμοποιούνται στα ενδιάμεσα στάδια μέχρι τον τελικό υπολογισμό, να προβληματιστούν

αν οι  $f(x) = \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8}$  και  $g(x) = \frac{(x^2 + 4) \cdot (x + 2)}{x^2 + 2x + 4}$  είναι ίσες και, αφού διαπιστώσουν ότι δεν

είναι ίσες, να δικαιολογήσουν γιατί έχουν ίσα όρια.

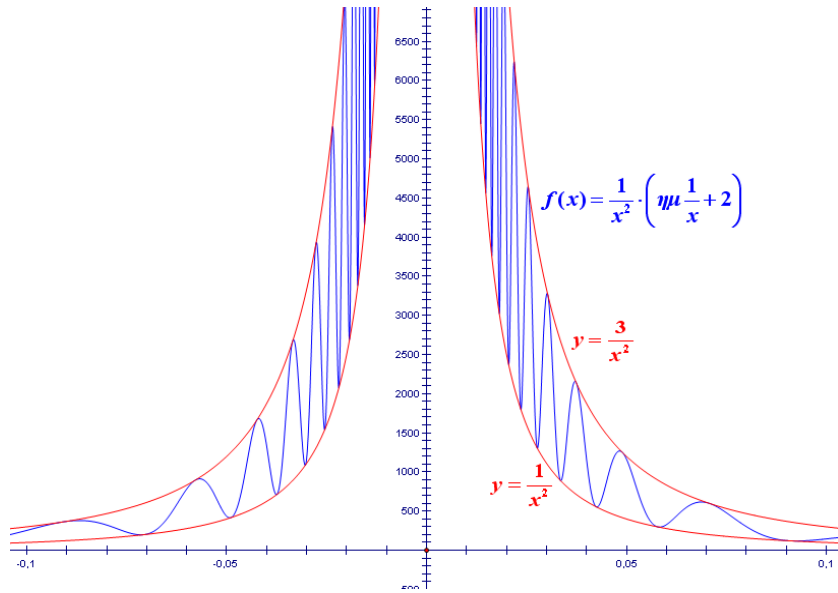
Επίσης, σε ασκήσεις όπου η συνάρτηση ορίζεται με διαφορετικό τύπο σε δύο συνεχόμενα διαστήματα, όπως π.χ. η άσκηση 5 της Α' Ομάδας, να ζητείται αιτιολόγηση γιατί στο σημείο αλλαγής του τύπου είμαστε υποχρεωμένοι να ελέγχουμε τα πλευρικά όρια, ενώ στα άλλα σημεία του πεδίου ορισμού μπορούμε να βρούμε το όριο χρησιμοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο. Δηλαδή, να φαίνεται ότι οι μαθητές/-τριες κατανοούν ότι το όριο καθορίζεται από τις τιμές της συνάρτησης κοντά στο  $x_0$  και εκατέρωθεν αυτού. Αυτό μας επιτρέπει στα σημεία τα διαφορετικά από το  $x_0$  να χρησιμοποιούμε τον ένα τύπο, ενώ στο  $x_0$  πρέπει να πάρουμε πλευρικά όρια.

## §1.6

Προτείνεται να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας με τη χρήση γραφικών παραστάσεων. Εκτός από τα παραδείγματα του βιβλίου να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, παραδείγματα όπου

το όριο δεν είναι πεπερασμένο αλλά δεν υπάρχει μονοτονία, όπως π.χ.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \cdot \left( \eta\mu \frac{1}{x} + 2 \right)$

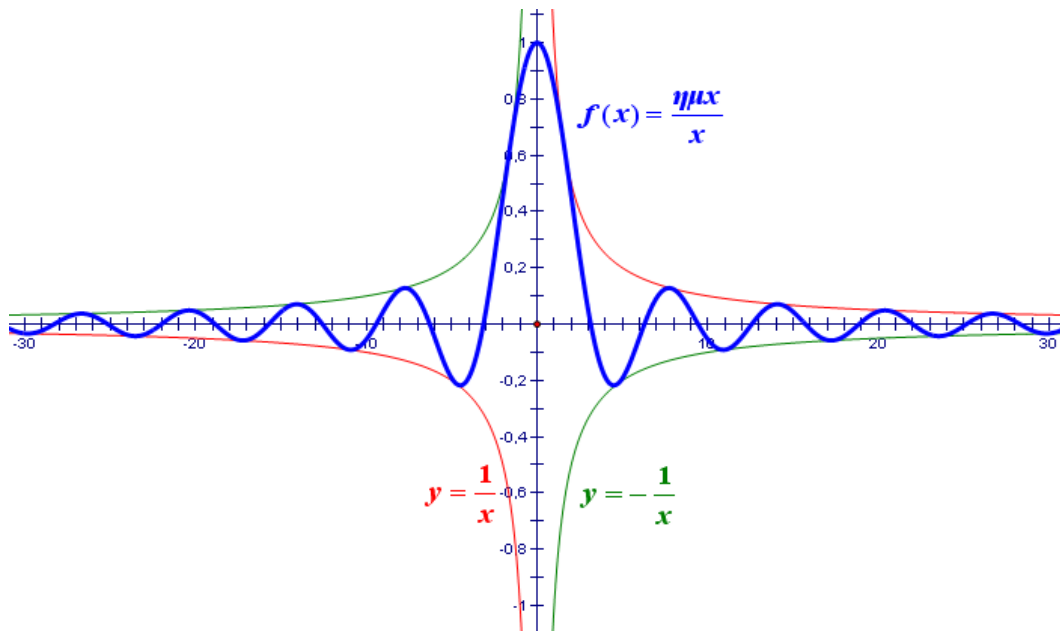
(Σχήμα 3), ώστε να αποφευχθεί η παρανόηση που συνδέει την ύπαρξη μη πεπερασμένου ορίου στο  $x_0$  με τη μονοτονία.



Σχήμα 3

**§1.7**

Προτείνεται να δοθεί βάρος στη διαισθητική προσέγγιση της έννοιας. Να δοθούν, μέσα από κατάλληλες γραφικές παραστάσεις, παραδείγματα συναρτήσεων των οποίων το όριο, όταν το  $x$  τείνει στο  $+\infty$ , υπάρχει αλλά οι συναρτήσεις αυτές δεν είναι μονότονες, όπως είναι για παράδειγμα η  $f(x) = \frac{\eta \mu x}{x}$  (Σχήμα 4), καθώς και συναρτήσεων των οποίων το όριο δεν υπάρχει, όταν το  $x$  τείνει στο  $+\infty$ , όπως είναι για παράδειγμα η  $f(x) = \eta \mu x$ .



Σχήμα 4

Τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\nu$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^\nu$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^\nu}$  και  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^\nu}$  να συζητηθούν με τη χρήση γραφικών παραστάσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, και πινάκων τιμών, με στόχο να αντιληφθούν διαισθητικά οι μαθητές/-ήτριες ποια είναι τα όρια αυτά.

Η τελευταία παράγραφος, πεπερασμένο όριο ακολουθίας, να συζητηθεί γιατί θα χρειαστεί για το ορισμένο ολοκλήρωμα.

Να δοθεί στους/στις μαθητές/-τριες η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις οι οποίες δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο:

Έστω  $f, g$  δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο  $x_0 \in \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .

i) Αν ισχύουν:

α)  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και

β)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ,

τότε θα ισχύει και  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ .

ii) Αν ισχύουν:

α)  $f(x) \leq g(x)$  κοντά στο  $x_0$  και

β)  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$ ,

τότε θα ισχύει και  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ .

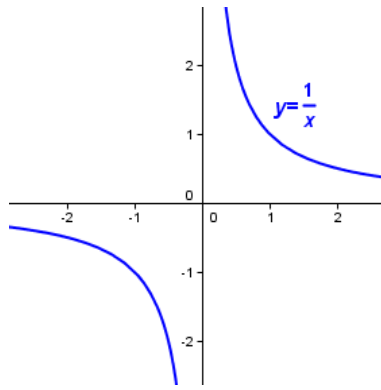
Η παρουσίαση των παραπάνω προτάσεων μπορεί να γίνει διαισθητικά με τη βοήθεια κατάλληλων γραφικών παραστάσεων.

### §1.8

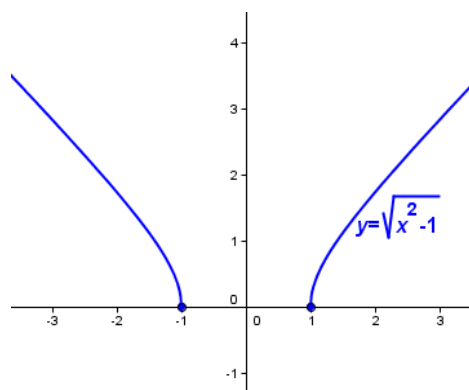
Στην πρώτη ενότητα (ορισμός της συνέχειας) είναι σημαντικό να συζητηθούν και γραφικά παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού ένωση ξένων διαστημάτων, όπως είναι για παράδειγμα οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{1}{x}$  (Σχήμα 5) και  $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  (Σχήμα 6).

Να συζητηθεί γιατί το γράφημα των συναρτήσεων αυτών διακόπτεται, παρόλο που είναι συνεχείς. Να δοθούν στους/στις μαθητές/-τριες και σχετικές ασκήσεις.





Σχήμα 5



Σχήμα 6

Επίσης, κατά τη διδασκαλία των θεωρημάτων Bolzano, ενδιάμεσων τιμών και μέγιστης και ελάχιστης τιμής, καθώς και της πρότασης ότι η συνεχής εικόνα διαστήματος είναι διάστημα, να δοθεί έμφαση και να συζητηθούν οι γραφικές παραστάσεις που ακολουθούν τις τυπικές διατυπώσεις αυτών, ώστε οι μαθητές/-τριες να βοηθηθούν στην ουσιαστική κατανόηση τους.

Το θεώρημα Bolzano είναι το πρώτο ουσιαστικά θεώρημα που συναντούν οι μαθητές/-τριες στην Ανάλυση. Για αυτό είναι καλό να γίνει μια συζήτηση που να αφορά την αναγκαιότητα των υποθέσεων του θεωρήματος ανάλογη με το σχόλιο του θεωρήματος των ενδιάμεσων τιμών. Επίσης θα πρέπει να τονισθεί ότι δεν ισχύει το αντίστροφο. Δηλαδή ενδέχεται οι τιμές μιας συνάρτησης στα άκρα ενός κλειστού διαστήματος  $[a, b]$  του πεδίου ορισμού της να έχουν το ίδιο πρόσημο, η συνάρτηση να μην είναι συνεχής στο  $[a, b]$  και όμως να παίρνει την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του  $[a, b]$ .

Διευκρινίζεται ότι στο θεώρημα προσδιορισμού του συνόλου τιμών συνάρτησης της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το ανοιχτό διάστημα  $(a, b)$ , τα  $a, b$  μπορεί να είναι και μη πεπερασμένα.

Να τονιστεί στους/στις μαθητές/-τριες ότι για την επίλυση ασκήσεων μπορεί να χρησιμοποιείται, αναπόδεικτα, η πρόταση:

Αν μία συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\sigma_1, \sigma_2)$  έχει την ιδιότητα  $\lim_{x \rightarrow \sigma_1} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow \sigma_2} f(x) = +\infty$  τότε το σύνολο τιμών της είναι το  $\mathbb{R}$ .

Για λόγους διδακτικούς μπορεί να παρουσιαστεί στην τάξη η απόδειξη:

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε πραγματικός αριθμός  $y$  είναι τιμή της  $f$ . Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση  $g(x) = f(x) - y$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow \sigma_1} g(x) = -\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow \sigma_2} g(x) = +\infty$ . Επομένως θα υπάρχουν  $x_1, x_2 \in (\sigma_1, \sigma_2)$  ώστε  $g(x_1) < 0$  και  $g(x_2) > 0$ . Θα είναι  $x_1 \neq x_2$  και από το θεώρημα του Bolzano η  $g$  θα έχει μια ρίζα  $x_0$  στο ανοικτό διάστημα με άκρα  $x_1, x_2$ . Άρα θα είναι  $g(x_0) = 0$  και επομένως  $f(x_0) = y$ , δηλαδή ο  $y$  θα είναι τιμή της  $f$ .

## Κεφάλαιο 2<sup>ο</sup>

### §2.1

Είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση στην εισαγωγή της έννοιας μέσω του προβλήματος της στιγμιαίας ταχύτητας και της εφαπτομένης. Μετά τον ορισμό της παραγώγου και της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης να συζητηθεί αναλυτικότερα η έννοια της εφαπτομένης. Επίσης, να δοθούν παραδείγματα που θα βοηθήσουν τον/την μαθητή/-τρια να ανακατασκευάσει την εικόνα της εφαπτομένης που έχει από τον κύκλο (η εφαπτομένη έχει ένα κοινό σημείο και δεν κόβει την καμπύλη) και να σχηματίσει μια γενικότερη εικόνα για την εφαπτομένη ευθεία. Για παράδειγμα, προτείνεται να συζητηθούν και να δοθούν στους/στις μαθητές/-τριες γραφικά:

i) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = x^3$  στο σημείο  $O(0,0)$ , ώστε να καταλάβουν ότι η εφαπτομένη μιας καμπύλης μπορεί να διαπερνά την καμπύλη και

ii) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g(x) = \begin{cases} x^2, & \alpha\nu x \leq 0 \\ 0, & \alpha\nu x > 0 \end{cases}$  στο

σημείο  $O(0,0)$ , ώστε να καταλάβουν ότι μια ημιευθεία της εφαπτομένης μιας καμπύλης μπορεί να συμπίπτει με ένα τμήμα της καμπύλης και επιπλέον ότι η εφαπτομένη μιας ευθείας σε κάθε σημείο της συμπίπτει με την ευθεία.

### §2.2

Χρειάζεται να προσεχθεί ιδιαίτερα το θέμα της κατανόησης από τους/τις μαθητές/-τριες των ρόλων του  $h$  και του  $x$  στην έκφραση  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  που χρησιμοποιείται

στο βιβλίο για τον υπολογισμό της παραγώγου των τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Να τονιστεί η διαφορά παραγώγου σε σημείο και παραγώγου συνάρτησης.

### §2.3

Χρειάζεται να δοθεί βάρος στην παραγωγή σύνθετης συνάρτησης καθώς και στην παρατήρηση σχετικά με το ότι το σύμβολο  $\frac{dy}{dx}$  δεν είναι πηλίκο.

Στην λυμένη εφαρμογή 2, να τονιστεί ότι η εξίσωση της ευθείας που βρέθηκε με βάση τον αναλυτικό ορισμό της εφαπτομένης είναι ίδια με αυτή που γνωρίζουμε από την αναλυτική γεωμετρία. Αυτό για να σταθεροποιηθεί στους/στις μαθητές/-τριες η αντίληψη ότι η έννοια της εφαπτομένης που πραγματεύονται στην ανάλυση συνδέεται και επεκτείνει την έννοια της εφαπτομένης που γνώρισαν στη Γεωμετρία.

### §2.4

Η έννοια του ρυθμού μεταβολής είναι σημαντική και δείχνει τη σημασία της έννοιας της παραγώγου στις εφαρμογές. Για τον λόγο αυτό είναι σημαντικό οι μαθητές/-τριες να κατανοήσουν την έννοια μέσα από ορισμένες χρήσιμες εφαρμογές.

### §2.5

Είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση στη γεωμετρική ερμηνεία των Θεωρημάτων Rolle και Μέσης Τιμής που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο μετά τη διατύπωση των θεωρημάτων αυτών.

Στην λυμένη εφαρμογή 3 να γίνει συζήτηση για το τι εκφράζει το πηλίκο  $\frac{S(2,5) - S(0)}{2,5}$  (μέση ταχύτητα της κίνησης) με στόχο να κατανοήσουν οι μαθητές/-τριες ότι αυτό που αποδεικνύεται είναι ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το αυτοκίνητο σε όλη την κίνηση.

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να συζητηθεί στην αρχή του κεφαλαίου το γεγονός, ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης ενός αυτοκινήτου κάποια στιγμή της διαδρομής η στιγμιαία ταχύτητά του θα είναι ίση με τη μέση ταχύτητά του (κάτι που οι μαθητές/-τριες το αντιλαμβάνονται διαισθητικά). Στη συνέχεια, να διατυπωθεί η μαθηματική σχέση που εκφράζει το γεγονός αυτό, και να τεθεί το ερώτημα αν το συμπέρασμα μπορεί να γενικευθεί και για άλλες συναρτήσεις. Η απάντηση στην ερώτηση αυτή είναι το Θεώρημα Μέσης Τιμής.

### §2.6

Στην αρχή της διδασκαλίας αυτού του κεφαλαίου μπορεί να συνδεθεί η μονοτονία μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα διάστημα  $\Delta$  του πεδίου ορισμού της με την διατήρηση του προσήμου του λόγου μεταβολής  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$  στο διάστημα αυτό. Συγκεκριμένα, να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση  $f$  είναι:

- i) γνησίως αύξουσα στο  $\Delta$ , αν και μόνο αν  $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$ , δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$  έχουν θετική κλίση.
- ii) γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ , αν και μόνο αν  $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$ , δηλαδή, αν και μόνο αν όλες οι χορδές της γραφικής παράστασης της  $f$  στο διάστημα  $\Delta$  έχουν αρνητική κλίση.

Με τον τρόπο αυτό θα συνδεθεί η μονοτονία με την παράγωγο και θα δικαιολογηθεί το γιατί στην απόδειξη του θεωρήματος της μονοτονίας χρησιμοποιούμε το λόγο μεταβολής  $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ .

## §2.7

Τα προβλήματα μεγίστων – ελαχίστων αποτελούν μία από τις σημαντικές εφαρμογές του διαφορικού λογισμού που δικαιολογούν και αποδίδουν αξία στη διδασκαλία του. Συγχρόνως, συγκεντρώνουν στοιχεία από τη διδασκαλία προηγούμενων ενοτήτων και έτσι αποτελούν μια καλή ευκαιρία επαναλήψεων και συμπληρώσεων. Κρίνεται σκόπιμο να συζητηθούν κατά το δυνατόν περισσότερα προβλήματα.

Μετά την εφαρμογή 2, να διδαχθεί ως εφαρμογή η άσκηση 3 i) α) της Β' Ομάδας. Ως απόδειξη, εκτός από εκείνη που περιέχεται στο βιβλίο λύσεων, μπορεί να δοθεί και η ακόλουθη που είναι έμμεση συνέπεια της εφαρμογής 2.

Ζητούμενο: Για κάθε  $x$  είναι  $e^x \geq x + 1$  και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για  $x = 0$ .

Απόδειξη: Για όλους τους θετικούς αριθμούς  $x$  ισχύει  $\ln x \leq x - 1$  και το « $\Rightarrow$ » ισχύει αν και μόνο αν  $x = 1$ . Επομένως και για τον θετικό  $e^x$  ισχύει  $\ln e^x \leq e^x - 1$  και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για  $e^x = 1$  δηλαδή  $x = 0$ . Επομένως  $x \leq e^x - 1$  και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για  $x = 0$ . Άρα  $e^x \geq x + 1$  και το « $\Rightarrow$ » ισχύει μόνο για  $x = 0$ .

## §2.8

Υπενθυμίζεται ότι θα μελετηθούν μόνο συναρτήσεις που είναι τουλάχιστον δύο φορές παραγωγίσιμες στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού τους. Για τον λόγο αυτό δεν θα διδαχθούν οι ασκήσεις 3iv και 3v της Α' Ομάδας.

## §2.9

Για μια διαισθητική κατανόηση του κανόνα De L' Hospital προτείνεται, πριν τη διατύπωσή του, να δοθεί στους/στις μαθητές/-τριες να υπολογίσουν το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x^2}$ , το οποίο είναι της μορφής « $\frac{0}{0}$ ». Οι μαθητές/-τριες θα διαπιστώσουν ότι δυσκολεύονται να υπολογίσουν το όριο αυτό με τις μεθόδους που γνωρίζουν μέχρι τώρα. Για να τους βοηθήσουμε να

υπολογίσουν το παραπάνω όριο προτείνουμε να δοθεί σε αυτούς η ακόλουθη δραστηριότητα.

#### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

- i) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = 1 - x^2$ .
- ii) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των  $f$  και  $g$  στο κοινό τους σημείο  $A(1,0)$  είναι οι ευθείες  $\varepsilon : y = x - 1$  και  $\zeta : y = -2x + 2$  αντιστοίχως και να τις χαράξετε.
- iii) Να κάνετε χρήση του γεγονότος ότι «κοντά» στο  $x_0 = 1$  οι τιμές των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = 1 - x^2$  προσεγγίζονται από τις τιμές των εφαπτομένων τους  $\varepsilon : y = x - 1$  και  $\zeta : y = -2x + 2$ , αντίστοιχα, για να καταλήξετε στο συμπέρασμα ότι «κοντά» στο  $x_0 = 1$  η τιμή του πηλίκου  $\frac{\ln x}{1 - x^2}$  είναι κατά προσέγγιση ίση με την τιμή

του πηλίκου  $\frac{x - 1}{-2x + 2}$ , δηλαδή ότι «κοντά» στο  $x_0 = 1$  ισχύει:

$$\frac{\ln x}{1 - x^2} \simeq \frac{x - 1}{-2x + 2} = \frac{x - 1}{-2(x - 1)} = \frac{1}{-2}$$

που είναι το πηλίκο των κλίσεων των παραπάνω ευθειών.

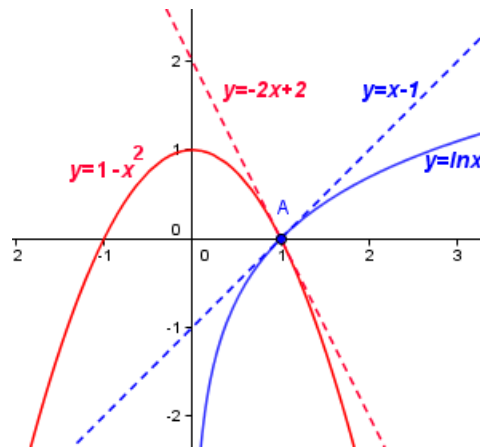
Επομένως, «κοντά» στο  $x_0 = 1$  ισχύει  $\frac{f(x)}{g(x)} \simeq \frac{f'(1)}{g'(1)}$ , το οποίο υπό μορφή ορίου

γράφεται:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(1)}{g'(1)}$ .

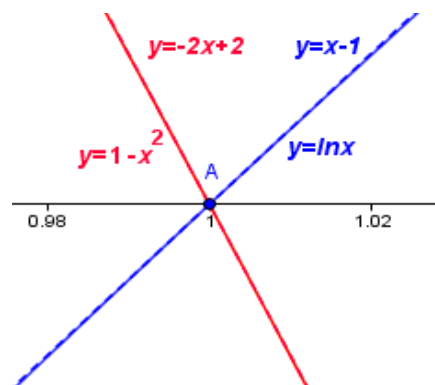
#### ΣΧΟΛΙΟ

Η διαπίστωση του γεγονότος ότι «κοντά» στο  $x_0 = 1$  οι τιμές των συναρτήσεων  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = 1 - x^2$  προσεγγίζονται από τις τιμές των εφαπτομένων τους,  $y = x - 1$  και  $y = -2x + 2$ , αντίστοιχα, μπορεί να γίνει και με τη βοήθεια ενός δυναμικού λογισμικού (π.χ. Geogebra), ως εξής:

- ✓ Παριστάνουμε γραφικά τις συναρτήσεις  $y = \ln x$  και  $y = 1 - x^2$  και στη συνέχεια χαράσσουμε τις εφαπτόμενες τους στο  $x_0 = 1$ ,  $y = x - 1$  και  $y = -2x + 2$ , αντιστοίχως (Σχήμα 7).
- ✓ Έπειτα, κάνουμε αλλεπάλληλα ZOOM κοντά στο σημείο  $A(1,0)$ . Θα παρατηρήσουμε ότι η  $y = \ln x$  θα συμπέσει με την ευθεία  $y = x - 1$ , ενώ η  $y = 1 - x^2$  θα συμπέσει με την ευθεία  $y = -2x + 2$  (Σχήμα 8).



Σχήμα 7



Σχήμα 8

Είναι σημαντικό να τονιστεί ότι οι κανόνες De l' Hospital δεν είναι πάντα πρόσφοροι για τον υπολογισμό ορίων απροσδιόριστων μορφών. Έτσι, αν έχουμε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$  και

επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα βρίσκουμε  $\frac{(\sqrt{x^2+1})'}{(x)'} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$  και

$\frac{(\sqrt{x^2+1})''}{(x)''} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$  δηλαδή επιστρέφουμε εκεί που αρχίσαμε χωρίς να βρούμε το όριο.

Χωρίς τον κανόνα βρίσκουμε:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = 1.$

Επίσης, να τονιστεί ότι γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ενδέχεται να τέμνει μια πλάγια ή οριζόντια ασύμπτωτή της. Ως παράδειγμα μπορεί να δοθεί (ευκαίτιο να δοθεί και το

γράφημα) η συνάρτηση  $f(x) = x + \eta\mu \frac{1}{x}$  που έχει ασύμπτωτη την  $y=x$  η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση της  $f$  σε άπειρα σημεία.

### §2.10

Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης είναι μια περιεκτική μορφή αναπαράστασης που παρέχει πληροφορίες για τη συνάρτηση με άμεσο και εύληπτο τρόπο. Συγχρόνως η διαδικασία μελέτης και χάραξης της βοηθάει στην εμπέδωση και ενοποίηση προηγούμενων γνώσεων. Στην περίπτωση που η συνάρτηση εκφράζει ένα φαινόμενο, η γραφική παράστασή της προσφέρει επιπλέον κατανόηση του φαινομένου. Για τον λόγο αυτό προτείνεται η χάραξη της γραφικής παράστασης συναρτήσεων που μελετήθηκαν σε προβλήματα προηγούμενων παραγράφων (π.χ. στη 2.7).

## Κεφάλαιο 3<sup>ο</sup>

### §3.1

Είναι σημαντικό να δοθεί έμφαση στα προβλήματα που διατυπώνονται στο σχολικό βιβλίο στην αρχή της ενότητας και να τονιστεί η σημασία της αντίστροφης διαδικασίας της παραγωγίσιμης. Θα ήταν καλό να συζητηθούν διεξοδικά ορισμένα από αυτά ή άλλα ανάλογα, ώστε να προκύψει η σημασία της αρχικής συνάρτησης.

Να συζητηθεί μόνο η πρώτη παράγραφος που αφορά στην παράγουσα συνάρτηση. Το αόριστο ολοκλήρωμα παραλείπεται και αντί του πίνακα αόριστων ολοκληρωμάτων να δοθεί ο παρακάτω πίνακας των παραγουσών μερικών βασικών συναρτήσεων.

A/A	Συνάρτηση	Παράγουσες
1	$f(x) = 0$	$G(x) = c, c \in \mathbb{R}$
2	$f(x) = 1$	$G(x) = x + c, c \in \mathbb{R}$
3	$f(x) = \frac{1}{x}$	$G(x) = \ln x  + c, c \in \mathbb{R}$
4	$f(x) = x^\alpha$	$G(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, c \in \mathbb{R}$
5	$f(x) = \sigma\upsilon\nu x$	$G(x) = \eta\mu x + c, c \in \mathbb{R}$
6	$f(x) = \eta\mu x$	$G(x) = -\sigma\upsilon\nu x + c, c \in \mathbb{R}$

7	$f(x) = \frac{1}{\sigma \nu^2 x}$	$G(x) = \varepsilon \varphi x + c, c \in \mathbb{R}$
8	$f(x) = \frac{1}{\eta \mu^2 x}$	$G(x) = -\sigma \varphi x + c, c \in \mathbb{R}$
9	$f(x) = e^x$	$G(x) = e^x + c, c \in \mathbb{R}$
10	$f(x) = a^x$	$G(x) = \frac{a^x}{\ln a} + c, c \in \mathbb{R}$

Σημείωση:

Οι τύποι του πίνακα αυτού ισχύουν σε κάθε διάστημα στο οποίο οι παραστάσεις του  $x$  που εμφανίζονται έχουν νόημα.

Οι δύο ιδιότητες των αόριστων ολοκληρωμάτων στο τέλος της παραγράφου μπορούν να αναδιατυπωθούν ως εξής:

Αν οι συναρτήσεις  $F$  και  $G$  είναι παράγουσες των  $f$  και  $g$  αντιστοίχως και ο  $\lambda$  είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε:

- i) Η συνάρτηση  $F+G$  είναι μια παράγουσα της συνάρτησης  $f+g$  και
- ii) Η συνάρτηση  $\lambda F$  είναι μια παράγουσα της συνάρτησης  $\lambda f$ .

Οι εφαρμογές και οι ασκήσεις να γίνουν με τη χρήση των αρχικών συναρτήσεων.

**§3.4**

Το πρώτο μέρος που αφορά στον υπολογισμό του εμβαδού παραβολικού χωρίου χρειάζεται να γίνει με τρόπο που να αναδεικνύει την αξιοποίηση των αθροισμάτων και της οριακής διαδικασίας για την εύρεση – υπολογισμό του εμβαδού. Στη συνέχεια είναι σημαντικό να γίνει διαισθητική προσέγγιση της έννοιας του ορισμένου ολοκληρώματος και να συνδεθεί με το εμβαδόν όταν η συνάρτηση δεν παίρνει αρνητικές τιμές και με τον υπολογισμό του παραβολικού χωρίου που προηγήθηκε. Προτείνεται να γίνει η εφαρμογή του βιβλίου για το ολοκλήρωμα σταθερής συνάρτησης και οι ιδιότητες που ακολουθούν.

Να δοθεί στους/στις μαθητές/-τριες η δυνατότητα να χρησιμοποιούν, αναπόδεικτα, τις παρακάτω προτάσεις αφού παρουσιαστούν σύντομα οι, προφανείς, αποδείξεις τους:

«Έστω  $f$  και  $g$  δυο συνεχείς συναρτήσεις σε ένα διάστημα  $[a, \beta]$ .

Αν  $f(x) \geq g(x)$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ , τότε θα ισχύει:  $\int_a^\beta f(x) dx \geq \int_a^\beta g(x) dx$ .

Αν, επιπλέον, οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  δεν είναι ίσες στο  $[a, \beta]$  (δηλαδή, αν υπάρχει  $\xi \in [a, \beta]$ , με  $f(\xi) \neq g(\xi)$ ), τότε θα ισχύει:  $\int_a^\beta f(x) dx > \int_a^\beta g(x) dx$ ».

**§3.5**



Η εισαγωγή της συνάρτησης  $\int_a^x f(t) dt$  γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Για τον λόγο αυτό δε θα διδαχθούν εφαρμογές και ασκήσεις που αναφέρονται στη συνάρτηση  $\int_a^x f(t) dt$  και γενικότερα στη συνάρτηση  $\int_a^{g(x)} f(t) dt$ .

### §3.7

Κατά τη διδασκαλία της παραγράφου μπορεί να χρειαστεί να συζητηθούν έννοιες και διαδικασίες από τις προηγούμενες τάξεις, όπως επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, συστημάτων, γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων.

#### Γενικές Παρατηρήσεις:

Τα θεωρήματα, οι προτάσεις, οι αποδείξεις και οι ασκήσεις που φέρουν αστερίσκο δε διδάσκονται και δεν εξετάζονται.

Οι εφαρμογές και τα παραδείγματα των βιβλίων δεν εξετάζονται ούτε ως θεωρία ούτε ως ασκήσεις, μπορούν, όμως, να χρησιμοποιηθούν ως προτάσεις για τη λύση ασκήσεων ή την απόδειξη άλλων προτάσεων.

Εξαιρούνται από την ύλη: α) οι εφαρμογές και οι ασκήσεις που αναφέρονται σε λογαρίθμους με βάση διαφορετική του  $e$  και του  $10$  και β) οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου που αναφέρονται σε τύπους τριγωνομετρικών αριθμών αθροίσματος γωνιών, διαφοράς γωνιών και διπλάσιας γωνίας.

## ΔΙΑΔΡΑΣΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΣΗΣ

Η εγκατάσταση των Διαδραστικών Οθονών Αφής στα σχολεία προσφέρει πολυάριθμα πλεονεκτήματα στο σχεδιασμό και στην ανάπτυξη της διδασκαλίας. Συγκεκριμένα:

- Παρέχεται η δυνατότητα οργάνωσης, καταγραφής και αποθήκευσης μαθημάτων που δύνανται να αξιοποιηθούν τόσο από τους/τις εκπαιδευτικούς όσο κι από τους/τις μαθητές/-τριες.
- Προσφέρεται η εύκολη πρόσβαση στο note, στα σχεδιαστικά εργαλεία των οθονών αφής, σε ποικίλους Ανοικτούς Εκπαιδευτικούς Πόρους / Open Educational Resources (ΑΕΠ / OER) που περιλαμβάνουν κατηγορίες όπως: Εκπαιδευτικά Παιχνίδια/Δυναμικός Χάρτης/Εφαρμογές Λογισμικού/AR-VR-MR Αντικείμενα /3D Αντικείμενα κ.ά. καθώς και στην εφαρμογή mozaBook (που είναι προεγκατεστημένη στο περιβάλλον windows των οθονών και μελλοντικά θα εμπλουτιστεί με τα διαδραστικά σχολικά βιβλία).
- Όλα τα παραπάνω αποτελούν καινοτόμα μαθησιακά περιβάλλοντα, εύχρηστα, με πλούσιο οπτικοακουστικό υλικό οικείου χαρακτήρα και εξοικείωσης με την καθημερινότητα των μαθητών/-τριών, που ανταποκρίνονται στα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Επίσης, δίνουν στον/στην εκπαιδευτικό την ευκαιρία να οργανώσει το μάθημά του/της, δημιουργώντας ένα «υβριδικό περιβάλλον εργασίας», που λειτουργεί ως διδακτικό αποθετήριο και εμπλουτίζεται στο πλαίσιο της σύγχρονης και ασύγχρονης διδασκαλίας.

- Οι εκπαιδευτικοί έχουν τη δυνατότητα να προσαρμόσουν το υλικό διδασκαλίας τους ώστε να ανταποκρίνεται στη γνωστική ετοιμότητα και στις ανάγκες των μαθητών/-τριών, σε σχέση με την ηλικία τους και τους διαφορετικούς τύπους μάθησης (οπτικός, ακουστικός, κιναισθητικός), προσφέροντας υλικό σε διαφορετικές μορφές, με άξονα τη συμπερίληψη όλων καθώς και την εξατομικευμένη μάθηση. Παράλληλα, η χρήση ποικίλων διαδραστικών δραστηριοτήτων επιτρέπουν την άμεση ανατροφοδότηση και αξιολόγηση του επιπέδου κατανόησης του μαθήματος.
- Η λειτουργία «πολλαπλής αφής» των διαδραστικών οθονών δίνει στον/στην εκπαιδευτικό την ευκαιρία να σχεδιάσει και να ενσωματώσει στη διδασκαλία ομαδικές δραστηριότητες, που επιτρέπουν τη συνέργεια των μαθητών/-τριών, καλλιεργώντας δεξιότητες όπως της συνεργασίας και επικοινωνίας.
- Οι οθόνες αφής μπορούν να συνδεθούν με το Google Drive ή το OneDrive, με υπολογιστές, τάμπλετ και άλλες συσκευές, διευκολύνοντας τη μεταφορά και την κοινή χρήση πληροφοριών.
- Δίνεται η δυνατότητα στον/στην εκπαιδευτικό να μοιράζεται με τους/τις μαθητές/-τριες εκπαιδευτικό υλικό και να το επαναχρησιμοποιεί, μειώνοντας τον φόρτο εργασίας.
- Δίνεται η δυνατότητα της αντεστραμμένης διδασκαλίας και η λειτουργία της ανεστραμμένης τάξης.
- Δίνεται η δυνατότητα ένταξης της τεχνητής νοημοσύνης (TN) στη μαθησιακή διαδικασία.
- Τέλος, τα διαδραστικά συστήματα μάθησης διευκολύνουν και επιταχύνουν τη διενέργεια του μαθήματος καθώς δεν απαιτούν συσκότιση της αίθουσας για να προβληθεί υλικό, έχουν ενσωματωμένα ηχεία και μπορούν να χρησιμοποιηθούν διαισθητικά με την αφή. Το σύνολο του υλικού των Οδηγών Διδασκαλίας είναι κατάλληλο για χρήση δια μέσου των διαδραστικών συστημάτων μάθησης. Επιπροσθέτως, τα συστήματα αυτά διαθέτουν την επιλογή της λειτουργίας τους ως ασπροπίνακες με πολλές επιπλέον δυνατότητες πέραν της απλής γραφής κειμένου (π.χ. λειτουργία screenshot της οθόνης και δυνατότητα γραφής σημειώσεων πάνω στο screenshot, αντιγραφή-επικόλληση μέρους των σημειώσεων κ.ά.).
- Το σύνολο των δυνατοτήτων του υλικού κάθε μοντέλου διαδραστικού συστήματος μάθησης μπορεί να αναζητηθεί στις εξής διευθύνσεις:
  - [Συχνές ερωτήσεις Διαδραστικών Συστημάτων.](#)
  - [Χρήσιμα αρχεία Διαδραστικών Συστημάτων.](#)

Για τη διδασκαλία των **Μαθηματικών**, οι διαδραστικές οθόνες αφής διευκολύνουν τη χρήση δυναμικών λογισμικών Μαθηματικών, εργαλείων γεωμετρικών κατασκευών, διαδραστικών ασκήσεων, βίντεο-ηχητικών, τρισδιάστατων μοντέλων, εγείροντας το ενδιαφέρον των μαθητών/-τριών και προάγοντας την αφομοίωση της ύλης.