ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο
Οι πραγματικοί αριθμοί

2.1 Οι Πράξεις και οι Ιδιότητές τους

2.2 Διάταξη Πραγματικών Αριθμών

2.3 Απόλυτη Τιμή Πραγματικών Αριθμών

2.4 Ρίζες Πραγματικών Αριθμών

Η εξεταστέα ύλη για το κεφάλαιο αυτό είναι:

Παράγραφος 2.1

Παράγραφος 2.2 (εκτός της απόδειξης της ιδιότητας 4)

Παράγραφος 2.3

Παράγραφος 2.4 (εκτός των αποδείξεων των ιδιοτήτων 3 και 4)

ΘΕΜΑ Α

Θέμα Α.1-Ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α.1.1. Ερωτήσεις Σωστού–Λάθους

Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε δίπλα στην κάθε πρόταση το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $(\alpha=\beta \text{ και } \gamma=\delta) \Leftrightarrow \alpha\gamma=\beta\delta$.

2. Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma=\beta+\gamma$.

3. Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma=\beta\gamma$.

4. Για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 0$ ή $\beta \neq 0$.

5. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ και κ,λ ακέραιους αριθμούς ισχύει ότι $\alpha^{\kappa}\cdot\alpha^{\lambda}=\alpha^{\kappa\lambda}$.

6. Για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta=(\alpha+\beta)^2$.

7. Για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\alpha^2-\beta^2=(\alpha-\beta)^2$.

8. Για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$.

9. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2 \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha=0$.

10. Ισχύει ότι: $\alpha\beta>0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\beta}>0$ $(\alpha\neq 0 \text{ και } \beta \neq 0)$.

11. Για κάθε $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha+\gamma>\beta+\gamma$.

12. Αν $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ και $\gamma<0$ ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha\gamma<\beta\gamma$.

13. Για όλους τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$(\alpha>\beta \text{ και } \gamma>\delta) \Rightarrow \alpha\cdot\gamma>\beta\cdot\delta$$

14. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha>\beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu}>\beta^{\nu}$$

15. Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu}=\beta^{\nu}$$

16. Αν $x \geq \alpha$, τότε γράφουμε και $x \in [\alpha,+\infty)$.

17. Αν $\alpha \le x \le \beta$, τότε γράφουμε και $x \in [\alpha, \beta)$.

18. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε $|\alpha| = \alpha$.

19. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε $|\alpha|^2 = \alpha^2$.

20. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε $|\alpha| \ge \alpha$ και $|\alpha| \le -\alpha$.

21. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε $|\alpha| = |-\alpha|$.

22. Αν $\theta > 0$, τότε $|x| = \theta \Leftrightarrow x = \theta$.

23. Αν $x, \alpha \in \mathbb{R}$, τότε $|x| = |\alpha| \Leftrightarrow x = \alpha$ ή $x = -\alpha$.

24. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.

25. Για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha\beta > 0$ ισχύει $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$.

26. Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει $|x - x_0| < \rho \Leftrightarrow x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$.

27. Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει $|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x < x_0 - \rho$ ή $x > x_0 + \rho$.

28. Αν θεωρήσουμε δύο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών με τα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε το μήκος (ΑΒ) είναι $(AB) = d(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$.

29. Για κάθε $\alpha \ge 0$ ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$.

30. Για κάθε $\alpha, \beta > 0$ ισχύει $\sqrt{\alpha + \beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

31. Για κάθε $\alpha \ge 0$ ισχύει $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$.

32. Αν $\alpha \le 0$ και ν άρτιος, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$.

33. Αν $\alpha \ge 0$ και μ,ν οποιοιδήποτε θετικοί ακέραιοι, τότε $\sqrt[\mu]{\sqrt[\nu]{\alpha}} = \sqrt[\mu+\nu]{\alpha}$.

34. Αν $\alpha > 0$, μ και ν θετικοί ακέραιοι, τότε ορίζουμε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$.

Α.1.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής επιλογής

Στις επόμενες προτάσεις η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι ***μόνο μία***. *Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.*

1. Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma < 0$, τότε:

Α. $\alpha\gamma > \beta\gamma$ ***Β.*** $\alpha + \gamma > \beta + \gamma$

Γ. $\dfrac{\alpha}{\gamma} > \dfrac{\beta}{\gamma}$ ***Δ.*** Τίποτα από τα προηγούμενα

2. Αν α, β είναι θετικοί αριθμοί με $\alpha > \beta$, τότε:

Α. $\alpha^2 > \beta^2$ ***Β.*** $\alpha^2 < \beta^2$

Γ. $\alpha^2 = \beta^2$ ***Δ.*** Τίποτα από τα προηγούμενα

3. Αν $x \in [-1, 5]$, τότε:

Α. $x \geq -1$ ***Β.*** $x \leq 5$

Γ. $-1 \leq x \leq 5$ ***Δ.*** $-1 < x < 5$

4. Αν $x \in \mathbb{R}$, θ θετικός αριθμός και $|x| = \theta$, τότε:

Α. μόνο $x = \theta$ ***Β.*** μόνο $x = -\theta$

Γ. $x = \theta$ ή $x = -\theta$ ***Δ.*** Τίποτα από τα προηγούμενα

5. Αν $x, \alpha \in \mathbb{R}$ με $|x| = |\alpha|$, τότε:

Α. μόνο $x = \alpha$ ***Β.*** μόνο $x = -\alpha$

Γ. $x^2 = \alpha^2$ ***Δ.*** Τίποτα από τα προηγούμενα

6. Αν $x_0 \in \mathbb{R}, \rho > 0$ και ισχύει: $x_0 - \rho < x < x_0 + \rho$, τότε:

Α. $|x - x_0| > \rho$ ***Β.*** $|x - x_0| < \rho$

Γ. $|x - x_0| = \rho$ ***Δ.*** Τίποτα από τα προηγούμενα

7. Αν $x_0 \in \mathbb{R}, \rho > 0$ και ισχύει: $x \in (-\infty, x_0 - \rho) \cup (x_0 + \rho, +\infty)$, τότε:

Α. $|x - x_0| > \rho$ ***Β.*** $|x - x_0| < \rho$

Γ. $|x - x_0| = \rho$ ***Δ.*** Τίποτα από τα προηγούμενα

8. Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε:

Α. $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha$ ***Β.*** $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = -|\alpha|$

Γ. $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = \alpha^\nu$ ***Δ.*** $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$

9. Αν $\alpha \geq 0$, τότε η $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{\alpha}}$ είναι ίση με:

Α. $\sqrt[\nu\mu]{\alpha}$ ***Β.*** $\sqrt[\nu+\mu]{\alpha}$ ***Γ.*** $\sqrt[\nu-\mu]{\alpha}$ ***Δ.*** $\sqrt[\frac{\nu}{\mu}]{\alpha}$

10. Αν $\alpha \geq 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, τότε ορίζουμε $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$:

Α. $\sqrt[\mu]{\alpha^\nu}$ ***Β.*** $\alpha^{\mu-\nu}$ ***Γ.*** $(\alpha^\mu)^\nu$ ***Δ.*** $\sqrt[\nu]{\alpha^\mu}$

Α.1.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

Στις επόμενες ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α ***με ένα μόνο*** *στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν αληθείς ή ισοδύναμες σχέσεις ή προτάσεις. Στη στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.*

1.

ΣΤΗΛΗ Α (ανίσωση)	ΣΤΗΛΗ Β (διάστημα)
1. $x \geq \alpha$	α. $x \in (-\infty, \alpha)$
2. $x < \alpha$	β. $x \in [\alpha, \beta)$
3. $\alpha \leq x < \beta$	γ. $x \in [\alpha, +\infty)$
	δ. $x \in [\alpha, \beta]$

2.

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1. $\lvert x \rvert = \theta \ (\theta > 0)$	α. Αδύνατη
2. $\lvert x \rvert = \lvert \alpha \rvert$	β. $x = -\kappa$
3. $\lvert x \rvert = \kappa \ (\kappa < 0)$	γ. $x = \alpha$ ή $x = -\alpha$
	δ. $x = \theta$ ή $x = -\theta$

3.

ΣΤΗΛΗ Α (σχέση με απόλυτες τιμές)	ΣΤΗΛΗ Β (σχέση με απόσταση)
1. $\lvert x-2 \rvert \geq 3$	α. $d(x,-3) \leq 2$
2. $\lvert x+2 \rvert \geq 3$	β. $d(x,3) \leq 2$
3. $\lvert x-3 \rvert \leq 2$	γ. $d(x,-2) \geq 3$
	δ. $d(x,2) \geq 3$

4.

ΣΤΗΛΗ Α (α,β > 0, ν θετικός ακέραιος και μ ακέραιος)	**ΣΤΗΛΗ Β**
1. $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}$	α. $\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$
2. $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$	β. $\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$
3. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$	γ. $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$
	δ. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$

5.

ΣΤΗΛΗ Α (α,β > 0)	**ΣΤΗΛΗ Β**
1. $\sqrt{\alpha^2\beta}$	α. $\beta\sqrt{\alpha}$
2. $\sqrt{\beta^2\alpha}$	β. $\sqrt{\alpha\beta}$
3. $\sqrt{\alpha^2\beta^2}$	γ. $\alpha\beta$
	δ. $\alpha\sqrt{\beta}$

Θέμα Α.2-Αποδείξεις προτάσεων και ιδιοτήτων

Στα επόμενα παρατίθενται όλες οι αποδείξεις των προτάσεων και των ιδιοτήτων του 2ου Κεφαλαίου που βρίσκονται στην εξεταστέα ύλη του μαθήματος: «Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων» της Α΄Λυκείου και θα αποτελέσουν το 2ο μέρος του 1ου θέματος (το Α2) στις γραπτές προαγωγικές εξετάσεις. Οι αποδείξεις έγιναν σύμφωνα με το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου.

1. Να αποδείξετε ότι: Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha = \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu = \beta^\nu$.

Απόδειξη

Έστω $\alpha = \beta$. Τότε, από τον ορισμό της ισότητας, προκύπτει ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$.
Για την απόδειξη του αντιστρόφου θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Έστω λοιπόν ότι $\alpha^\nu = \beta^\nu$ και $\alpha \neq \beta$. Τότε:

- ❖ αν ήταν $\alpha > \beta$, λόγω της γνωστής ιδιότητας, θα είχαμε $\alpha^\nu > \beta^\nu$(άτοπο), ενώ
- ❖ αν ήταν $\alpha < \beta$, λόγω της γνωστής ιδιότητας, θα είχαμε $\alpha^\nu < \beta^\nu$ (άτοπο).

Άρα, $\alpha = \beta$.

2. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$.

Απόδειξη

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta| \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = \left(|\alpha| \cdot |\beta|\right)^2 \Leftrightarrow |\alpha \cdot \beta|^2 = |\alpha|^2 \cdot |\beta|^2 \Leftrightarrow (\alpha \cdot \beta)^2 = \alpha^2 \cdot \beta^2,$$

που ισχύει.

3. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$.

Απόδειξη

Επειδή και τα δύο μέλη της ισότητας $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ $(\beta \neq 0)$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \Leftrightarrow \left(\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|\right)^2 = \left(\frac{|\alpha|}{|\beta|}\right)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{\beta^2},$$ που ισχύει.

(Η απόδειξη αυτή δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο. Ωστόσο αναφέρεται ότι γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως η πρόταση 2.)

4. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Απόδειξη

Επειδή και τα δύο μέλη της ανισότητας $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, έχουμε διαδοχικά:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \Leftrightarrow |\alpha + \beta|^2 \leq \left(|\alpha| + |\beta|\right)^2 \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \leq |\alpha|^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| + |\beta|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \leq \alpha^2 + 2|\alpha| \cdot |\beta| + \beta^2 \Leftrightarrow \alpha\beta \leq |\alpha\beta|,$$ που ισχύει.

(Είναι φανερό ότι η ισότητα $\alpha\beta = |\alpha\beta|$ ισχύει, αν και μόνο αν $\alpha\beta \geq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι ή ένας τουλάχιστον από αυτούς είναι ίσος με μηδέν.)

5. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}$ (ν θετικός ακέραιος).

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta} = \sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt[\nu]{\alpha} \cdot \sqrt[\nu]{\beta}\right)^\nu = \left(\sqrt[\nu]{\alpha \cdot \beta}\right)^\nu \Leftrightarrow (\sqrt[\nu]{\alpha})^\nu \cdot (\sqrt[\nu]{\beta})^\nu = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = \alpha \cdot \beta,$$

που ισχύει.

6. Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta > 0$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$ (ν θετικός ακέραιος).

Απόδειξη

Έχουμε:

$$\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}} = \sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}} \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}\right)^{\nu} = \left(\sqrt[\nu]{\frac{\alpha}{\beta}}\right)^{\nu} \Leftrightarrow \frac{(\sqrt[\nu]{\alpha})^{\nu}}{(\sqrt[\nu]{\beta})^{\nu}} = \frac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \ (\beta \neq 0), \text{ που ισχύει.}$$

(Η απόδειξη αυτή δεν υπάρχει στο σχολικό βιβλίο. Ωστόσο αναφέρεται ότι γίνεται με τον ίδιο τρόπο όπως η πρόταση 5.)

ΘΕΜΑ Β

Από την Τράπεζα Θεμάτων του Υπουργείου ΠΑΙ.Θ. (Ι.Ε.Π.). Περιλαμβάνονται 39 θέματα αυτής της κατηγορίας.

ΘΕΜΑ Β1

Δίνεται η παράσταση $K = \dfrac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2} - \dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x, ώστε η παράσταση Κ να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 12)

β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι η παράσταση Κ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β2

Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \cong 1,41$$
$$\sqrt{3} \cong 1,73$$
$$\sqrt{5} \cong 2,24$$
$$\sqrt{7} \cong 2,64$$

α) Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$, $\sqrt{80}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών, πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$;

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β3

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει $(x-1)^2+(y+3)^2=x^2+y^2-2x+6y+10$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε $x^2+y^2-2x+6y+10=0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β4

α) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha+\frac{1}{\alpha}\leq -2$.

(Μονάδες 15)

β) Αν $\alpha<0$, να αποδειχθεί ότι $|\alpha|+\left|\frac{1}{\alpha}\right|\geq 2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β5

Αν $2\leq x\leq 3$ και $1\leq y\leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x+y$

(Μονάδες 5)

β) $2x-3y$

(Μονάδες 10)

γ) $\frac{x}{y}$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β6

α) Αν $\alpha, \beta \neq 0$, να αποδειχθεί ότι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2 \quad (1).$

(Μονάδες 15)

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β7

Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$, τότε:

α) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 10)

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β8

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύουν:

$$3 \leq x \leq 5 \text{ και } -2 \leq y \leq -1$$

να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $y - x$

(Μονάδες 12)

β) $x^2 + y^2$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β9

Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α;

(Μονάδες 7)

β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β;

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β10

Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.

(Μονάδες 15)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς Α, Β.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β11

Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύουν $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$. Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $\alpha - 2\beta$

(Μονάδες 12)

β) $\alpha^2 - 2\alpha\beta$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β12

Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β13

Δίνονται οι παραστάσεις $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3-\beta)$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$.

(Μονάδες 3)

β) Να δείξετε ότι $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

(Μονάδες 10)

γ) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β14

Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει $\dfrac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

(Μονάδες 13)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \dfrac{\alpha^{22}(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}(\alpha\beta)^{25}}$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β15

Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}) \cdot (\sqrt{x-4} - \sqrt{x+1})$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β16

Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $d(2x,3)=3-2x$.

α) Να αποδείξετε ότι $x \le \frac{3}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x \le \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $K=|2x-3|-2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β17

α) Να δείξετε ότι $3<\sqrt[3]{30}<4$.

(Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6-\sqrt[3]{30}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β18

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες13)

β) Για $x=5$, να αποδείξετε ότι $A^2+A-6=0$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β19

Δίνεται η παράσταση $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 12)

β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι $A^2 - A = 2(10 - \sqrt{5})$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β20

Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Α; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Αν $x = -3$, να αποδείξετε ότι $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β21

Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος.

(Μονάδες 13)

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι $B^2 + 6B = B^4$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β22

Δίνονται οι αριθμοί $A = \left(\sqrt{2}\right)^6$ και $B = \left(\sqrt[3]{2}\right)^6$.

α) Να δείξετε ότι $A - B = 4$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$\sqrt{2},\ 1,\ \sqrt[3]{2}$$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β23

Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$, $B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6$, $\Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6$.

α) Να δείξετε ότι $A+B+\Gamma=23$.

(Μονάδες 13)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β24

Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση $|x+1|<2$:

α) να δείξετε ότι $x\in(-3,1)$,

(Μονάδες 12)

β) να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K=\dfrac{|x+3|+|x-1|}{4}$ είναι αριθμός ανεξάρτητος του x.

(Μονάδες13)

ΘΕΜΑ Β25

Δίνεται η παράσταση $A=|x-1|+|y-3|$, με x,y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει $1<x<4$ και $2<y<3$. Να αποδείξετε ότι:

α) $A=x-y+2$

(Μονάδες 12)

β) $0<A<4$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β26

Δίνεται η παράσταση $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x\geq 2$, $A=3x-4$

ii) για κάθε $x<2$, $A=8-3x$

(Μονάδες 12)

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x \geq 2$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = 3x+4$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β27

Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha + \dfrac{4}{\alpha} \geq 4$

(Μονάδες 12)

β) $\left(\alpha + \dfrac{4}{\alpha}\right) \cdot \left(\beta + \dfrac{4}{\beta}\right) \geq 16$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β28

Δίνονται οι παραστάσεις $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β.

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β29

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει $|y-3| < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β30

α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει $|y-3| < 1$.

(Μονάδες 12)

β) Αν x, y είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι $6 < \Pi < 14$, όπου Π είναι η περίμετρος του ορθογωνίου.

ΘΕΜΑ Β31

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β, γ, δ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε να ισχύουν $\dfrac{\alpha+\beta}{\beta} = 4$ και $\dfrac{\gamma}{\delta-\gamma} = \dfrac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Pi = \dfrac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β32

Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί ώστε να ισχύει $\dfrac{4x+5y}{x-4y} = -2$.

α) Να αποδείξετε ότι $y = 2x$.

(Μονάδες 12)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{2x^2+3y^2+xy}{xy}$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β33

Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$:

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x-5|$ και $|x-10|$ χωρίς απόλυτες τιμές.

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \dfrac{|x-5|}{x-5} + \dfrac{|x-10|}{x-10}$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β34

Δίνεται η παράσταση $A = |x-1| - |x-2|$.

α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι $A = 2x - 3$.

(Μονάδες 13)

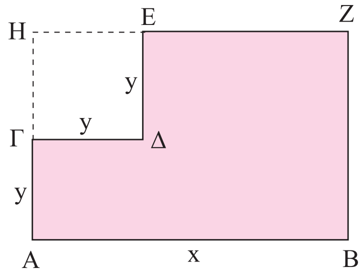
β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση Α έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β35

Από το ορθογώνιο ΑΒΖΗ αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ πλευράς y.

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του γραμμοσκιασμένου σχήματος ΕΖΒΑΓΔ που απέμεινε δίνεται από τη σχέση $\Pi = 2x + 4y$.



(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου σχήματος.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β36

Δίνονται οι παραστάσεις $A = |2x-4|$ και $B = |x-3|$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Για κάθε $2 \le x < 3$, να αποδείξετε ότι $A + B = x - 1$.

(Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2, 3)$, ώστε να ισχύει $A + B = 2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Β37

Δίνεται η παράσταση $A = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} + \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$.

α) Να δείξετε ότι $A = 4$.

(Μονάδες 12)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x + A| = 1$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β38

Αν $0 < \alpha < 1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 < \alpha$.

(Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}$$

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β39

Δίνεται πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει $d(x, -2) < 1$.

Να δείξετε ότι:

α) $-3 < x < -1$

(Μονάδες 10)

β) $x^2 + 4x + 3 < 0$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ

Με την εισήγηση των διδασκόντων. Περιλαμβάνονται 12 θέματα αυτής της κατηγορίας.

ΘΕΜΑ Γ1

Δίνεται η παράσταση $A=\left[(x^3y^5)^{-1}\cdot(x^2y^3)^5\right]:\left(\dfrac{x^3}{y^{-2}}\right)$ με $x,y\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A=(xy^2)^4$.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης Α, όταν $x=32$ και $y=\dfrac{1}{16}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν $x\geq 0$, να αποδείξετε ότι $\sqrt[12]{A}=(xy^2)^{\frac{1}{3}}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ2

α) Να αποδείξετε ότι $\left[\dfrac{x(x+1)}{2}\right]^2-\left[\dfrac{x(x-1)}{2}\right]^2=x^3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι $1+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\dfrac{\nu^2(\nu+1)^2}{4}$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}$.

ΘΕΜΑ Γ3

Αν για τους πραγματικούς αριθμούς μ,ν ισχύει $\mu^2+\nu^2=1$, να αποδείξετε ότι:

α) $|\mu|\leq 1$ και $|\nu|\leq 1$

β) $|\mu\nu| \le \frac{1}{2}$

γ) $\frac{1}{2} \le \mu^4 + \nu^4 \le 1$

ΘΕΜΑ Γ4

Δίνονται οι παραστάσεις $K = \sqrt{2x^2 - 4x + 2}$ και $\Lambda = \sqrt[3]{3x^3 - 9x^2 + 9x - 3}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις Κ και Λ;

(Μονάδες 12)

β) Να γράψετε τις παραστάσεις Κ, Λ χωρίς τα ριζικά.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$, αν ισχύει $K - |\Lambda| = 2\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{3}$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ5

Έστω οι αριθμοί Κ και Μ τέτοιοι, ώστε:

$$K = |P(A) - 1| \text{ και } M = |P^2(B) - 2P(B) + 3|$$

όπου P(A) και P(B) οι πιθανότητες δύο ενδεχομένων, Α και Β αντίστοιχα, ενός δειγματικού χώρου Ω.

α) Να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις Κ και Μ.

(Μονάδες 10)

β) Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ισοπίθανα, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $K^2 - M$ είναι ανεξάρτητη των P(A) και P(B).

(Μονάδες 7)

ii) Αν, επιπλέον, τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα και $K = \frac{1}{2}$, $M = \frac{9}{4}$, να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο $A \cup B$ είναι βέβαιο.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ6

Δίνεται η παράσταση $A(x)=\dfrac{|x+2|-|x-2|}{|x+2|+|x-2|}$.

α) Για ποιες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση $A(x)$;

(Μονάδες 6)

β) Αν $|x|<2$, να αποδείξετε ότι $A(x)=\dfrac{x}{2}$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν $|x|>2$, να αποδείξετε ότι $A(x)=\dfrac{2}{x}$.

(Μονάδες 8)

δ) Ποια είναι η τιμή της παράστασης $A(x)$ αν $|x|=2$;

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ7

Δίνονται οι αριθμοί $\kappa=\sqrt{2}+1,\ \lambda=\sqrt{2}-1$ και η παράσταση $A=\left(\sqrt[3]{\kappa}-\sqrt[3]{\lambda}\right)^3$.

Να αποδείξετε ότι:

α) **i)** $\sqrt[3]{(\kappa\lambda)^2}=1$ **ii)** $\sqrt[3]{\kappa^2\lambda}=\sqrt[3]{\kappa}$ **iii)** $\sqrt[3]{\kappa\lambda^2}=\sqrt[3]{\lambda}$

(Μονάδες 3x6 = 18)

β) $A=2-3\left(\sqrt[3]{\kappa}-\sqrt[3]{\lambda}\right)$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ8

Δίνονται οι αριθμοί $x=\dfrac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$ και $y=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}$. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $A=(x-y)^2$

(Μονάδες 10)

β) $B=(x+y)^3$

(Μονάδες 7)

γ) $\Gamma=x^3+y^3$

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ9

Έστω οι αριθμοί x, y τέτοιοι, ώστε $\frac{1}{2}\le x\le 1$ και $y\in(-2,0)\cup\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση:

$$A=2x^2+3y+1$$

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $B=\dfrac{y-1+\sqrt{(3y-1)^2}}{2y}$ είναι ανεξάρτητη του y.

(Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Gamma=\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}+\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$ είναι ανεξάρτητη του x.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ10

α) Αν $x, y, z>0$ με $x<y+z$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{x+z}{y+z}<\dfrac{2(x+z)}{x+y+z}$.

(Μονάδες 10)

β) Αν οι αριθμοί α, β, γ εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ενός τριγώνου, να αποδείξετε ότι $\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma}+\dfrac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta}+\dfrac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}<4$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ11

Αν για τους πραγματικούς θετικούς αριθμούς x, y, z ισχύει $xy+yz+zx=1$, να αποδείξετε ότι:

α) $x^2+1=(x+y)(x+z)$

(Μονάδες 10)

β) $K = x\sqrt{\dfrac{(y^2+1)(z^2+1)}{x^2+1}} + y\sqrt{\dfrac{(x^2+1)(z^2+1)}{y^2+1}} + z\sqrt{\dfrac{(x^2+1)(y^2+1)}{z^2+1}} = 2$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ12

Δίνονται οι αριθμοί:

$$\kappa = P(A)+\frac{1}{2},\ \lambda = P(B)+\frac{1}{2} \text{ και } \mu = P(A\cup B)-\frac{1}{2} \text{ με}$$

$$\kappa^2+\lambda^2-\mu = [P(A)]^2+[P(B)]^2+\frac{14}{13}\ (1) \text{ και } \left|\kappa+\lambda-\frac{3}{4}\right| = \frac{1}{3}\ (2)$$

όπου $P(A)$ και $P(B)$ οι πιθανότητες δύο ενδεχομένων, Α και Β, αντίστοιχα, ενός δειγματικού χώρου Ω. Να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

α) $A\cap B$

(Μονάδες 15)

β) $A'\cap B'$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ

Από την Τράπεζα Θεμάτων του Υπουργείου ΠΑΙ.Θ.(Ι.Ε.Π.). Περιλαμβάνονται 7 θέματα αυτής της κατηγορίας.

ΘΕΜΑ Δ1

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση:

$$(\alpha-1)(1-\beta)>0$$

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β.

(Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta-\alpha|=4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K=|\alpha-1|+|1-\beta|$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας είτε γεωμετρικά είτε αλγεβρικά.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Δ2

Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση $d(x,5)\leq 9$.

α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά.

(Μονάδες 5)

β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x.

(Μονάδες 5)

γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β).

(Μονάδες 10)

δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι $|x+4|+|x-14|=18$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ3

Δίνονται τα σημεία Α, Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς –2, 7 και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

i) $|x+2|$

(Μονάδες 4)

ii) $|x-7|$

(Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $|x+2|+|x-7|$.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A=|x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

(Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ4

Σε έναν άξονα τα σημεία Α, Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ5

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $|x-4|<2$.

(Μονάδες 10)

β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x που η απόστασή του από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2.

i) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της απόστασης του 3x από το 19.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ6

Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι:

- $|\alpha-2|<1$
- $|\beta-3|\le 2$

α) Να αποδειχθεί ότι $1<\alpha<3$.

(Μονάδες 4)

β) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται ο β.

(Μονάδες 5)

γ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $2\alpha-3\beta$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ7

Για τη μέτρηση θερμοκρασιών χρησιμοποιούνται οι κλίμακες βαθμών Κελσίου (Celsius), Φαρενάιτ (Fahrenheit) και Κέλβιν (Kelvin). Οι μετατροπές της θερμοκρασίας από Κελσίου σε Φαρενάιτ και από Κελσίου σε Κέλβιν, περιγράφονται από τις προτάσεις Π1 και Π2:

Π1: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^oC) σε βαθμούς Φαρενάιτ (^oF), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.

Π2: Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^oC) σε βαθμούς Κέλβιν (^oK), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (^oC) το 273.

α) Να εκφράσετε συμβολικά τη σχέση που περιγράφει η κάθε πρόταση.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση που παριστάνει τη σχέση μεταξύ της θερμοκρασίας σε βαθμούς Κέλβιν (^oK) και της θερμοκρασίας σε βαθμούς Φαρενάιτ (^oF) είναι η $K = \dfrac{F-32}{1,8} + 273$.

(Μονάδες 7)

γ) Στη διάρκεια μιας νύχτας η θερμοκρασία σε μια πόλη κυμάνθηκε από 278^oK μέχρι 283^oK. Να βρείτε το διάστημα μεταβολής της θερμοκρασίας σε ^oF.

(Μονάδες 10)

Ακολουθούν προσομοιωμένα ανακεφαλαιωτικά Διαγωνίσματα στο 2ο Κεφάλαιο, σύμφωνα με τις οδηγίες του Ι.Ε.Π. και τη σχετική νομοθεσία για τη δομή, επιλογή και διάρθρωση των θεμάτων.

Διαγώνισμα 1

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για τους θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$.

Μονάδες 2

β) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)^2$.

Μονάδες 2

γ) Για όλους τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$(\alpha > \beta \text{ και } \gamma > \delta) \Rightarrow \alpha \cdot \gamma > \beta \cdot \delta$$

Μονάδες 2

δ) Για $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\rho > 0$ ισχύει $|x - x_0| > \rho \Leftrightarrow x < x_0 - \rho$ ή $x > x_0 + \rho$.

Μονάδες 2

ε) Αν $\alpha \leq 0$ και ν άρτιος, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha^\nu} = |\alpha|$.

Μονάδες 2

Α2. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$.

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Β; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x υπό μορφή διαστήματος.

Μονάδες 13

β) Για $x = 4$, να αποδείξετε ότι $B^2 + 6B = B^4$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραστάσεις $K = \sqrt{2x^2 - 4x + 2}$ και $\Lambda = \sqrt[3]{3x^3 - 9x^2 + 9x - 3}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις Κ και Λ;

Μονάδες 12

β) Να γράψετε τις παραστάσεις Κ, Λ χωρίς τα ριζικά.

Μονάδες 7

γ) Να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$, αν ισχύει $K - |\Lambda| = 2\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{3}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Σε έναν άξονα τα σημεία Α, Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x - 5|$ και $|x - 9|$.

Μονάδες 10

β) Αν ισχύει $|x - 5| = |x - 9|$:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 7

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Διαγώνισμα 2

Συνδυαστικό 1ο και 2ο Κεφάλαιο

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν (α, β, γ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε $\alpha,\beta > 0$ ισχύει $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

Μονάδες 2

β) Για κάθε $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$.

Μονάδες 2

γ) Αν θεωρήσουμε δύο αριθμούς α και β που παριστάνονται πάνω στον άξονα με τα σημεία Α και Β αντίστοιχα, τότε το μήκος (ΑΒ) είναι:

$$(AB) = d(\alpha,\beta) = |\alpha-\beta|$$

*Στις παρακάτω ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α **με ένα μόνο** στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν ισότητες, αληθείς σχέσεις ή προτάσεις. Στη στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.*

δ)

ΣΤΗΛΗ Α (σχέση με απόλυτες τιμές)	**ΣΤΗΛΗ Β (σχέση με απόσταση)**
1. $\|x-2\| \geq 3$	α. $d(x,-3) \leq 2$
2. $\|x+2\| \geq 3$	β. $d(x,3) \leq 2$
3. $\|x-3\| \leq 2$	γ. $d(x,-2) \geq 3$
	δ. $d(x,2) \geq 3$

Μονάδες 2

ε)

ΣΤΗΛΗ Α (α,β > 0, ν θετικός ακέραιος και μ ακέραιος)	**ΣΤΗΛΗ Β**
1. $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}$	α. $\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$
2. $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$	β. $\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$
3. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$	γ. $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$
	δ. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$

Μονάδες 2

Α2. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$ (ν θετικός ακέραιος).

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Αν $0<\alpha<1$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3<\alpha$.

Μονάδες 13

β) Να διατάξετε από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$0,\ \alpha^3,\ 1,\ \alpha,\ \frac{1}{\alpha}$$

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι αριθμοί Κ και Μ τέτοιοι, ώστε:

$$K=|P(A)-1| \text{ και } M=|P^2(B)-2P(B)+3|$$

όπου P(A) και P(B) οι πιθανότητες δύο ενδεχομένων, Α και Β αντίστοιχα, ενός δειγματικού χώρου Ω.

α) Να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές τις παραστάσεις Κ και Μ.

Μονάδες 10

β) Αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ισοπίθανα, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $K^2 - \Lambda$ είναι ανεξάρτητη των P(A) και P(B).

Μονάδες 7

ii) Αν, επιπλέον, τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα και $K = \frac{1}{2}$, $M = \frac{9}{4}$, να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο $A \cup B$ είναι βέβαιο.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται τα σημεία Α, Β και Μ που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς –2, 7 και x αντίστοιχα με $-2 < x < 7$.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων:

i) $|x+2|$

Μονάδες 4

ii) $|x-7|$

Μονάδες 4

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος $|x+2|+|x-7|$.

Μονάδες 5

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x+2|+|x-7|$ γεωμετρικά.

Μονάδες 5

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα.

Μονάδες 7

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο
Εξισώσεις

3.1 Εξισώσεις 1ου Βαθμού

3.2 Η εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$

3.3 Εξισώσεις 2ου Βαθμού

Η εξεταστέα ύλη για το κεφάλαιο αυτό είναι:

Παράγραφος 3.1

Παράγραφος 3.2

Παράγραφος 3.3

ΘΕΜΑ Α

Θέμα Α.1-Ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α.1.1. Ερωτήσεις Σωστού–Λάθους

Στις επόμενες προτάσεις να γράψετε δίπλα στην κάθε πρόταση το γράμμα Σ, αν η πρόταση είναι σωστή, ή το γράμμα Λ, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1. Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ έχει ακριβώς μία λύση όταν $\alpha\neq 0$.
2. Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ είναι αδύνατη όταν $\alpha=0$.
3. Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ είναι ταυτότητα όταν $\alpha=\beta=0$.
4. Η εξίσωση $(\lambda-2)x=\lambda^2-4$ είναι ταυτότητα αν $\lambda=2$.
5. Η εξίσωση $(\lambda^2-4)x=\lambda-2$ είναι αδύνατη αν $\lambda=-2$.
6. Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$, με $\alpha>0$ και ν περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μία λύση, τη $\sqrt[\nu]{\alpha}$.
7. Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$, με $\alpha>0$ και ν άρτιο φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$.
8. Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$, με $\alpha<0$ και ν περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μία λύση, τη $-\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.
9. Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$, με $\alpha<0$ και ν άρτιο φυσικό αριθμό, είναι ταυτότητα.
10. Αν ο ν είναι περιττός φυσικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^\nu=\alpha^\nu$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1=\alpha$ και $x_2=-\alpha$.
11. Αν ο ν είναι άρτιος φυσικός αριθμός, τότε η εξίσωση $x^\nu=\alpha^\nu$ έχει δύο λύσεις, τις $x_1=\alpha$ και $x_2=-\alpha$.
12. Η εξίσωση $x^{2\nu}=1$ έχει ακριβώς μία λύση, τη $x=1$.
13. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.
14. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού.

15. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ και $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$ έχει δύο άνισες ρίζες.

16. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ και $\Delta=0$ έχει διπλή ρίζα, τη $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

17. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ και $\Delta<0$ είναι αδύνατη.

18. Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 και ισχύει ότι $S=x_1+x_2=0$, τότε οι ρίζες είναι αντίθετες.

19. Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 και ισχύει ότι $P=x_1\cdot x_2=1$, τότε οι ρίζες είναι αντίστροφες.

20. Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 και ισχύουν $S=x_1+x_2<0$ και $P=x_1\cdot x_2>0$, τότε οι ρίζες είναι θετικές.

21. Η εξίσωση $|\alpha|x^2+\beta x-|\gamma|=0$ $(\alpha\neq 0)$ έχει δύο άνισες ρίζες.

Α.1.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

*Στις επόμενες προτάσεις η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι **μόνο μία**. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.*

1. Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ με $\alpha=0$ είναι αδύνατη όταν:

Α. $\beta\neq 0$ ***Β.*** $\beta=0$ ***Γ.*** μόνο $\beta>0$ ***Δ.*** μόνο $\beta<0$

2. Η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ με $\alpha=0$ είναι ταυτότητα όταν:

Α. $\beta\neq 0$ ***Β.*** $\beta=0$ ***Γ.*** $\beta>0$ ***Δ.*** $\beta<0$

3. Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$ με $\alpha<0$ και ν άρτιο φυσικό αριθμό έχει:

Α. ακριβώς μία λύση ***Β.*** καμία λύση

Γ. δύο λύσεις ***Δ.*** τίποτα από τα προηγούμενα

4. Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο $\mathbb{R}$ όταν:

Α. $\Delta<0$ ***Β.*** $\Delta=0$ ***Γ.*** $\Delta\geq 0$ ***Δ.*** $\Delta>0$

5. Η εξίσωση $\alpha^2 x^2 - \beta x - \gamma^2 = 0$ με $\alpha \neq 0$ έχει:

Α. καμία ρίζα ***Β.*** δύο άνισες ρίζες

Γ. μία διπλή ρίζα ***Δ.*** τίποτα από τα προηγούμενα

6. Αν S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, τότε οι ρίζες είναι αρνητικές αν:

Α. $S < 0$ και $P > 0$ ***Β.*** $S < 0$ και $P < 0$

Γ. $S > 0$ και $P < 0$ ***Δ.*** $S > 0$ και $P > 0$

7. Αν S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα δύο πραγματικών αριθμών x_1 και x_2, τότε η εξίσωση που έχει ρίζες τις x_1 και x_2 είναι η:

Α. $x^2 + Sx + P = 0$ ***Β.*** $x^2 - Sx - P = 0$

Γ. $x^2 + Sx - P = 0$ ***Δ.*** $x^2 - Sx + P = 0$

8. Η εξίσωση $(x-1)(x+2) = 0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση:

Α. $x^2 + x - 2 = 0$ ***Β.*** $x^2 - x + 2 = 0$

Γ. $x^2 - x - 2 = 0$ ***Δ.*** $x^2 + x + 2 = 0$

Α.1.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

Στις επόμενες ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α ***με ένα μόνο*** *στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν ισότητες και αληθείς ή ισοδύναμες σχέσεις ή προτάσεις. Στη στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.*

1. Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha x + \beta = 0$ (1) με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

ΣΤΗΛΗ Α (Η (1)...)	**ΣΤΗΛΗ Β** (Αν ...)
1. Έχει μία ακριβώς λύση	α. $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$
2. Είναι αδύνατη	β. $\alpha = \beta = 0$
3. Είναι ταυτότητα	γ. $\alpha \neq 0$
	δ. Για όλες τις τιμές των α, β

2. Θεωρούμε την εξίσωση $x^{\nu} = \alpha \left(\alpha \in \mathbb{R} \text{ και } \nu \in \mathbb{N} - \{0\}\right)$.

ΣΤΗΛΗ Α (Αν ...)	**ΣΤΗΛΗ Β** (Τότε η εξίσωση ...)
1. $\alpha > 0$ και ν περιττός	α. Έχει ακριβώς μία λύση, την $\sqrt[\nu]{\alpha}$
2. $\alpha > 0$ και ν άρτιος	β. Είναι αδύνατη
3. $\alpha < 0$ και ν περιττός	γ. Έχει ακριβώς δύο λύσεις, τις $\sqrt[\nu]{\alpha}$ και $-\sqrt[\nu]{\alpha}$
	δ. Έχει ακριβώς μία λύση, τη $-\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert}$

3. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \ (1) \text{ με } \alpha \neq 0, \ \beta, \ \gamma \in \mathbb{R} \text{ και } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

ΣΤΗΛΗ Α (Η εξίσωση (1) ...)	**ΣΤΗΛΗ Β** (Αν είναι ...)
1. Έχει δύο ρίζες	α. $\Delta < 0$
2. Έχει μία διπλή ρίζα	β. $\Delta = 0$
3. Είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$	γ. $\beta \neq 0$
	δ. $\Delta > 0$

4. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ $(\alpha \neq 0, \ \Delta > 0)$ με $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$.

ΣΤΗΛΗ Α (Αν ...)	**ΣΤΗΛΗ Β** (Τότε S ή P = ...)
1. $S = x_1 + x_2$	α. $-\dfrac{\gamma}{2\alpha}$
2. $P = x_1 \cdot x_2$	β. $-\dfrac{\beta}{\alpha}$
	γ. $\dfrac{\gamma}{\alpha}$

5. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ($\alpha\neq 0$ και $\Delta>0$), όπου $S=x_1+x_2$ και $P=x_1\cdot x_2$.

ΣΤΗΛΗ Α (Αν ...)	**ΣΤΗΛΗ Β** (Τότε ...)
1. $P<0$	α. x_1, x_2 ομόσημες
2. $S=0$	β. x_1, x_2 ετερόσημες
3. $P>0$ και $S<0$	γ. x_1, x_2 αρνητικές
	δ. x_1, x_2 αντίθετες

Θέμα Α.2-Αποδείξεις προτάσεων και ιδιοτήτων

Στα επόμενα παρατίθενται όλες οι αποδείξεις των προτάσεων και των ιδιοτήτων που βρίσκονται στην εξεταστέα ύλη του μαθήματος: «Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων» της Α΄Λυκείου και θα αποτελέσουν το 2ο μέρος του 1ου θέματος (το Α2). Οι αποδείξεις έγιναν σύμφωνα με το περιεχόμενο του σχολικού βιβλίου.

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει ακριβώς μία λύση, τη $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Απόδειξη

Έχουμε $\alpha x+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha x+\beta-\beta=-\beta \Leftrightarrow \alpha x=-\beta$.

Αν $\alpha\neq 0$, τότε $\alpha x=-\beta \Leftrightarrow x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$. Επομένως αν $\alpha\neq 0$, η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση, τη $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ με $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$ είναι αδύνατη.

Απόδειξη

Έχουμε $\alpha x+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha x+\beta-\beta=-\beta \Leftrightarrow \alpha x=-\beta$. Αν $\alpha=0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=-\beta$ και αφού $\beta\neq 0$ η εξίσωση δεν έχει λύση. Γι' αυτό λέμε ότι είναι αδύνατη.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ με $\alpha=0$ και $\beta=0$ είναι ταυτότητα.

Απόδειξη

Έχουμε $\alpha x+\beta=0 \Leftrightarrow \alpha x+\beta-\beta=-\beta \Leftrightarrow \alpha x=-\beta$. Αν $\alpha=\beta=0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=0$ και αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x. Δηλαδή είναι ταυτότητα.

4. Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ και τη διακρίνουσά της $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$. Να αποδείξετε ότι αν $\Delta>0$, η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες, τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

Απόδειξη

Για την επίλυση της εξίσωσης θα εφαρμόσουμε τη μέθοδο της **«συμπλήρωσης του τετραγώνου»**.

Έχουμε:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \quad (\text{αφού } \alpha\neq 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x=-\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}x=-\frac{\gamma}{\alpha} \Leftrightarrow x^2+2\cdot\frac{\beta}{2\alpha}x+\frac{\beta^2}{4\alpha^2}=-\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{\beta^2}{4\alpha^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}$$

Αν θέσουμε $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$, τότε η τελευταία εξίσωση γίνεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$$

Αν $\Delta > 0$, τότε έχουμε:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x+\frac{\beta}{2\alpha}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right), \text{ δηλαδή} \left(x=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha} \text{ ή } x=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\right)$$

5. Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ και τη διακρίνουσά της $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$. Να αποδείξετε ότι αν $\Delta = 0$, η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα, τη $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας όπως στην προηγούμενη απόδειξη τη μέθοδο της **«συμπλήρωσης του τετραγώνου»** έχουμε $\left(x+\dfrac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4\alpha^2}$.

Αν $\Delta = 0$, τότε η εξίσωση γράφεται:

$$\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)\cdot\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}=0 \text{ ή } x+\frac{\beta}{2\alpha}=0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x=-\frac{\beta}{2\alpha} \text{ ή } x=-\frac{\beta}{2\alpha}\right)$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, τη $-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

6. Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ και τη διακρίνουσά της $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$. Να αποδείξετε ότι αν $\Delta < 0$, η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας όπως στην προηγούμενη απόδειξη τη μέθοδο της **«συμπλή-**

ρωσης του τετραγώνου» έχουμε $\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2=\frac{\Delta}{4\alpha^2}$.

Αν $\Delta<0$, τότε η τελευταία εξίσωση, άρα και η ισοδύναμή της η αρχική, δεν έχει πραγματικές ρίζες, δηλαδή είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

7. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ ($\alpha\neq 0$, $\Delta>0$), να αποδείξετε ότι το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών είναι αντίστοιχα $S=-\frac{\beta}{\alpha}$ και $P=\frac{\gamma}{\alpha}$.

Απόδειξη

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$ και $x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$. Τώρα έχουμε:

$$S=x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

$$P=x_1\cdot x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{(-\beta)^2-\left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}$$

ΘΕΜΑ Β

Από την Τράπεζα Θεμάτων του Υπουργείου ΠΑΙ.Θ.(Ι.Ε.Π.). Περιλαμβάνονται 27 θέματα αυτής της κατηγορίας.

ΘΕΜΑ Β1

Δίνεται η εξίσωση $x^2-(\lambda-1)x+6=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ.

(Μονάδες 13)

β) Για $\lambda=2$ να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β2

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2-(\lambda-1)x-1=0$ με παράμετρο $\lambda\neq 0$.

α) Να βρείτε την τιμή του λ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -2.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\neq 0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β3

Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+5x-1$.

α) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες x_1 και x_2.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων x_1+x_2, $x_1\cdot x_2$ και $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 9)

γ) Να προσδιορίσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β4

α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$.

(Μονάδες 12)

β) Αν α, β με $\alpha<\beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+3=0$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β5

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+4(\lambda-1)=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει $x_1+x_2=x_1\cdot x_2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Β6

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x=x+\lambda^2-1$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$$(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda+1),\ \lambda\in\mathbb{R}$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η παραπάνω εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση την οποία και να βρείτε.

(Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του λ η παραπάνω εξίσωση είναι ταυτότητα στο σύνολο των πραγματικών αριθμών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Β7

α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|=\sqrt{3}$.

(Μονάδες 10)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του (α) ερωτήματος.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β8

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-9)x=\lambda^2-3\lambda$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$ (1).

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές πραγματικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις.

(Μονάδες 6)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του, ώστε η (1) να έχει μία και μοναδική λύση.

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του λ, ώστε η μοναδική λύση της (1) να ισούται με 4.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β9

Θεωρούμε την εξίσωση $x^2+2x+\lambda-2=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 10)

β) Στην περίπτωση που η εξίσωση έχει δυο ρίζες x_1, x_2, να προσδιορίσετε το λ, ώστε να ισχύει $x_1 \cdot x_2 - 2(x_1 + x_2) = 1$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β10

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+3)x = \alpha^2 - 9$ με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha = 1$

(Μονάδες 5)

ii) όταν $\alpha = -3$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β11

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση $\Pi = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \dfrac{1}{1 - x}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού.

(Μονάδες 10)

β) Για τις τιμές του x που βρήκατε στο (α) ερώτημα, να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - x} + \dfrac{1}{1 - x} = 0$.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β12

Δίνεται ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 20$ cm και εμβαδό $E = 24$ cm^2.

α) Να κατασκευάσετε μία εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ως ρίζες τα μήκη των πλευρών αυτού του ορθογωνίου.

(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β13

Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α και β, τέτοιοι ώστε:

$$\alpha+\beta=12 \text{ και } \alpha^2+\beta^2=272$$

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$, να δείξετε ότι:

$$\alpha\beta=-64$$

(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β.

(Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Β14

Δίνονται οι αριθμοί $A=\dfrac{1}{3-\sqrt{7}}$ και $B=\dfrac{1}{3+\sqrt{7}}$.

α) Να δείξετε ότι $A+B=3$ και $A\cdot B=\dfrac{1}{2}$.

(Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β15

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha\beta=4 \text{ και } \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=20$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=5$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β16

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=-1 \text{ και } \alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=-12$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β17

Δίνεται το τριώνυμο $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$.

(Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β18

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2+10x=12$.

(Μονάδες 15)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β19

Δίνεται το τριώνυμο $x^2-\kappa x-2$, με $\kappa\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta > 0$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$, όπου Δ η διακρίνουσα του τριωνύμου.

(Μονάδες 13)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x - 2 = 0$ (1):

i) Να βρείτε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών της (1).

ii) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες ρ_1 και ρ_2, όπου $\rho_1 = 2x_1$ και $\rho_2 = 2x_2$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β20

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - 1)x = (\lambda + 1)(\lambda + 2)$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -1$.

(Μονάδες 12)

β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει μοναδική λύση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β21

Δίνεται η παράσταση $K = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{2x^2 - 3x - 2}$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Β22

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=2 \text{ και } \alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\beta=-15$.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Β23

Δίνονται οι παραστάσεις $A=\dfrac{1+x}{x-1}$ και $B=\dfrac{2}{x^2-x}$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις Α, Β πρέπει $x\neq 1$ και $x\neq 0$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $A=B$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Β24

Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+4(\lambda-1)=0$ με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να βρείτε για ποια τιμή του λ ισχύει $(x_1+x_2)^2+x_1x_2+5=0$.

ΘΕΜΑ Β25

Δίνονται οι αριθμοί $A=\dfrac{1}{5+\sqrt{5}}$, $B=\dfrac{1}{5-\sqrt{5}}$.

α) Να δείξετε ότι:

i) $A+B=\dfrac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A\cdot B=\dfrac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς Α και Β.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Β26

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$ με παράμετρο $\lambda\neq-2$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) Η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 13)

β) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Β27

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$ με παράμετρο $\lambda\neq-2$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το λ ώστε $x_1x_2=-3$.

(Μονάδες 13)

Το θέμα Β19 έχει αποσυρθεί. Είναι όμως κατάλληλο για την παρούσα κατηγορία του Β θέματος.

ΘΕΜΑ Γ

Με την εισήγηση των διδασκόντων. Περιλαμβάνονται 18 θέματα αυτής της κατηγορίας.

ΘΕΜΑ Γ1

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\frac{t-1}{2}-\frac{t-2}{3}=\frac{t-3}{4}$

(Μονάδες 9)

β) $\frac{|x-3|-1}{2}-\frac{|x-3|-2}{3}=\frac{|x-3|-3}{4}$

(Μονάδες 7)

γ) $\frac{\left|\sqrt[3]{x^2-1}+8\right|-1}{2}-\frac{\left|\sqrt[3]{x^2-1}+8\right|-2}{3}=\frac{\left|\sqrt[3]{x^2-1}+8\right|-3}{4}$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ2

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $y^2-3y-4=0$

(Μονάδες 4)

β) $x^2(x-3)-3x(x-3)=4(x-3)$

(Μονάδες 7)

γ) $(x-5)^2-3(5-x)-4=0$

(Μονάδες 7)

δ) $(x-5)^2-(5-x)(x+1)=0$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ3

Να λύσετε την εξίσωση $(\lambda^2 - 9)x = |\lambda - 3|$ (1) όταν:

α) $\lambda = 3$

(Μονάδες 6)

β) $\lambda = -3$

(Μονάδες 6)

γ) $\lambda \neq 3$ και $\lambda \neq -3$

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Γ4

Δίνονται οι παραστάσεις $A = 9\lambda^2 - 12\lambda + 4$, $B = 4 - 9\lambda^2$ και η εξίσωση $B \cdot x = A$ (1).

Για ποια $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση (1):

α) Είναι ταυτότητα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

β) Είναι αδύνατη; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Έχει μοναδική λύση; Στην περίπτωση αυτή να βρείτε τη λύση της.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ5

Δίνονται οι εξισώσεις:

$$\sqrt{3} \cdot x^2 - \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)x + \sqrt{5} = 0 \quad (1) \quad \text{και} \quad \sqrt{5} \cdot x^2 - \left(\sqrt{3} + \sqrt{5}\right)x + \sqrt{3} = 0 \quad (2)$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (2) έχει επίσης δύο άνισες πραγματικές ρίζες, οι οποίες είναι αντίστροφες των ριζών της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 8)

γ) Να γενικεύσετε το παράδειγμα των εξισώσεων (1) και (2), κατασκευάζοντας μια εξίσωση που έχει ρίζες τις αντίστροφες των ριζών της εξίσωσης $\sqrt{\alpha}\cdot x^2-\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)x+\sqrt{\beta}=0$, με $\alpha, \beta>0$ και $\alpha\neq\beta$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ6

Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+\beta)^2x^2-2(\alpha^2-\beta^2)x+(\alpha-\beta)^2=0$ (1).

α) Πότε η εξίσωση (1) είναι $2^{ου}$ βαθμού;

(Μονάδες 8)

β) Αν η εξίσωση (1) είναι $2^{ου}$ βαθμού, να αποδείξετε ότι έχει μία διπλή ρίζα για κάθε $\alpha, \beta\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λυθεί η εξίσωση (1).

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ7

Δίνεται η εξίσωση $x^2-2\lambda x+\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\mu\nu=0$ με $\lambda, \mu, \nu\in\mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα της εξίσωσης (1) και να αποδείξετε ότι έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda, \mu, \nu\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1), αν έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. Πότε η εξίσωση (1) έχει ίσες ρίζες; Στην περίπτωση αυτή να βρείτε τη διπλή ρίζα της.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Γ8

Δίνεται η εξίσωση $x^2-\mu x+\nu=0$ (1) με $\mu, \nu\in\mathbb{N}-\{0\}$ και $\mu^2>4\nu$.

α) Να κατασκευάσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τις αντίθετες των ριζών της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η (1) δεν έχει ρίζα το 0 και να κατασκευάσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τις αντίστροφες των ριζών της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον $\nu = \mu$:

i) Να βρείτε τα ν, μ, ώστε οι ρίζες της εξίσωσης (1) να διαφέρουν κατά $\sqrt{5}$.

(Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε τα ν, μ, ώστε το τετράγωνο της μίας ρίζας της εξίσωσης (1) να είναι η άλλη της ρίζα.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ9

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^2 - 13x + 36 = 0$ (1)

(Μονάδες 7)

β) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ (2)

(Μονάδες 8)

γ) $|x-2|^2 - 13|x-2| + 36 = 0$ (3)

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Γ10

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\kappa x + \lambda = 0$ (1) με τους αριθμούς κ, λ να αποτελούν τις ενδείξεις της ρίψης δύο ζαριών αντίστοιχα.

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) Η εξίσωση (1) να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 9)

β) Η εξίσωση (1) να έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 9)

γ) Η εξίσωση (1) να μην έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ11

Δίνεται η εξίσωση $P(A)x^2 - 2P(A \cup B)x + 4P(B) = 0$ (1), όπου $P(A)$ και $P(B)$ οι πιθανότητες δύο ασυμβίβαστων ενδεχομένων Α και Β, αντίστοιχα, ενός δειγματικού χώρου Ω.

α) Ποια είναι η συνθήκη για το ενδεχόμενο Α, ώστε η εξίσωση (1) να είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού;

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την εξίσωση (1), αν είναι $1^{ου}$ βαθμού.

(Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες αν $A \neq \varnothing$.

(Μονάδες 9)

δ) Αν $A \neq \varnothing$ και η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα, να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ισοπίθανα.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Γ12

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - |\kappa - 1|x + \kappa^2 = 0,\ \kappa \in \mathbb{R}$ (1).

α) Για ποιες τιμές του κ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα;

(Μονάδες 6)

β) Αν $|\kappa - 1| = 2$, να λύσετε την εξίσωση (1).

(Μονάδες 5)

γ) Αν $-1 < \kappa < \frac{1}{3}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

δ) Για $-1<\kappa<\frac{1}{3}$, να κατασκευάσετε την εξίσωση που έχει ως ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης (1) αυξημένες κατά 3.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ13

Δίνεται η εξίσωση $x^2-\left(|\lambda-1|-2\right)x+\left(|2\lambda-2|-4\right)=0$ (1) με $\lambda\in\mathbb{R}$. Επιλέγουμε τυχαία μια τιμή $\lambda\in\Omega$, όπου $\Omega=\left\{-10,\ -9,\ -3,\ 0,\ \frac{1}{2},\ 3,\ \frac{10}{3},\ 11\right\}$ ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης του οποίου τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Έστω Α, Β και Γ τα ενδεχόμενα του Ω που ορίζονται:

$A=\{\lambda\in\Omega\,/\,$ η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές και ίσες$\}$

$B=\{\lambda\in\Omega\,/\,$ η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες$\}$

$\Gamma=\{\lambda\in\Omega\,/\,$ η εξίσωση (1) να μην έχει καμία πραγματική ρίζα$\}$

Να βρείτε:

α) Την πιθανότητα του ενδεχομένου Α.

(Μονάδες 8)

β) Την πιθανότητα του ενδεχομένου Β.

(Μονάδες 9)

γ) Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ14

Δίνονται οι εξισώσεις $|2x-1|=3$ (1) και $|3x+3|=2x+2$ (2).

α) Να λύσετε τις εξισώσεις (1) και (2).

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της μορφής $\alpha x^2+\beta x+1=0$ $(\alpha\neq0)$ που έχει μία διπλή ρίζα, την κοινή λύση των εξισώσεων (1) και (2).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ15

Δίνεται η εξίσωση $x^2-\mu x+3\nu=0$ $(\mu,\nu\in\mathbb{Z})$ (1), η οποία έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2 με $\rho_1\neq\rho_2$.

α) Να αποδείξετε ότι $\mu^2>12\nu$ και ότι $S^2>4P$, όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα μ,ν, ώστε οι ρίζες ρ_1 και ρ_2 να πληρούν ταυτόχρονα τις σχέσεις:

$$3\rho_1+3\rho_2=2\rho_1\rho_2 \ (2) \text{ και } 3-\rho_1\rho_2=5(\rho_1+\rho_2-2) \ (3)$$

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Γ16

Δίνεται η εξίσωση $(2\lambda-1)x^2-|4\lambda-2|x+4\lambda^2-1=0$ (1) με $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ η εξίσωση (1) είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού;

(Μονάδες 4)

β) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta=-8\lambda(2\lambda-1)^2$$

(Μονάδες 8)

γ) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες και για ποιες τιμές του λ είναι αδύνατη;

(Μονάδες 5)

δ) Στην περίπτωση που η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες, να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι αρνητικές.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Γ17

Δίνεται η εξίσωση $[2P(A)-1]x^2-|4P(A')-2|x-4[P(A)]^2+1=0$ (1), όπου $P(A)$ και $P(A')$ οι πιθανότητες δύο συμπληρωματικών ενδεχομένων A και A΄ αντίστοιχα, ενός δειγματικού χώρου Ω με $A\neq\varnothing$.

α) Να γράψετε σε μορφή διαστήματος τις τιμές που μπορεί να πάρει η πιθανότητα του ενδεχομένου Α, ώστε η εξίσωση (1) να είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες ετερόσημες.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Γ18

Δίνονται οι εξισώσεις $|x^2-6x+9|=x-1$ (1) και $\alpha x^2+\sqrt{\beta}\cdot x+\gamma=0$ (2) με $\alpha\neq 0$, $\beta>4\alpha\gamma$ και $\beta>0$, καθώς και η παράσταση $A=\dfrac{|3x-3|}{x^2-2x+1}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση (1).

β) Να λύσετε την εξίσωση $A=1$.

γ) Αν η εξίσωση (2) έχει ως ρίζες τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη από τις ρίζες που προέκυψαν από τα ερωτήματα (α) και (β), να αποδείξετε ότι $\alpha<0$ και $\gamma>0$.

ΘΕΜΑ Δ

Από την Τράπεζα Θεμάτων του Υπουργείου ΠΑΙ.Θ.(Ι.Ε.Π.). Περιλαμβάνονται 41 θέματα αυτής της κατηγορίας.

ΘΕΜΑ Δ1

Δίνεται η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες.

(Μονάδες 10)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S=x_1+x_2$.

ii) Να βρείτε το $P=x_1\cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ.

(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$, τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ2

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+(2\lambda+3)x+\lambda-2=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\neq-2$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι $\Delta=12\lambda+25$.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\neq-2$, ώστε η εξίσωση (1) να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

γ) Να εκφράσετε ως συνάρτηση του λ το άθροισμα των ριζών $S = x_1 + x_2$ και το γινόμενο των ριζών $P = x_1 \cdot x_2$.

(Μονάδες 4)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή του λ, ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η σχέση $(x_1 + x_2 - 1)^2 + (x_1 \cdot x_2 + 3)^2 = 0$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ3

Δίνεται η εξίσωση $\alpha\beta x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha\beta = 0$, όπου α, β δύο θετικοί αριθμοί.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 - \beta^2)^2$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των αριθμών α και β, ώστε η εξίσωση να έχει δυο ρίζες άνισες, τις οποίες να προσδιορίσετε, ως συνάρτηση των α, β.

(Μονάδες 10)

γ) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $x_2 = \dfrac{\beta}{\alpha}$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \geq 4$$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ4

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + (\lambda - 1) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ5

Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), τότε και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι επίσης ρίζα της εξίσωσης.

(Μονάδες 5)

γ) Για $\lambda>2$, να αποδείξετε ότι:

i) Οι ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) είναι αριθμοί θετικοί.

ii) $x_1+4x_2\geq 4$.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Δ6

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$ (1), με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την εξίσωση όταν $\lambda=0$.

(Μονάδες 5)

β) Έστω $\lambda\neq 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, τις οποίες στη συνέχεια να βρείτε.

(Μονάδες 10)

ii) Αν $x_1 = -1$ και $x_2 = -1 + \frac{2}{\lambda}$ είναι οι δυο ρίζες της εξίσωσης (1), να προσδιορίσετε τις τιμές του λ, για τις οποίες ισχύει $|x_1 - x_2| > 1$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ7

Δίνονται οι εξισώσεις $x^2 - 3x + 2 = 0$ (1) και $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2).

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης (2).

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τριώνυμο της μορφής $x^2 + \beta x + \gamma$ που οι ρίζες του να είναι κάποιες από τις ρίζες της εξίσωσης (2) και επιπλέον, για κάθε αρνητικό αριθμό x, να έχει θετική τιμή.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ8

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \beta x + \gamma = 0$ με β, γ πραγματικούς αριθμούς.

Αν η παραπάνω εξίσωση έχει δύο ρίζες άνισες για τις οποίες ισχύει $|x_1 + x_2| = 4$, τότε:

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του β.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\gamma < 4$.

(Μονάδες 7)

γ) Δίνεται επιπλέον η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ (1).

Να εξετάσετε για ποια από τις τιμές του β που βρήκατε στο (α) ερώτημα, η εξίσωση (1) δεν έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Δ9

Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ10

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1 x_2} \leq \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ11

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

δ) Αν $0<\lambda\neq 1$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, τότε να συγκρίνετε τους αριθμούς $\dfrac{x_1+x_2}{2}$ και 1.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ12

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

(Μονάδες 8)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1x_2$ των ριζών.

(Μονάδες 5)

γ) Αν $\lambda<0$, τότε:

i) το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 6)

ii) να αποδείξετε ότι $|x_1+x_2|\geq 2x_1x_2$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες του προηγούμενου τριωνύμου.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ13

Δίνεται η εξίσωση $2x^2+\lambda x-36=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι, για κάθε τιμή του λ, η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 8)

β) Υποθέτουμε τώρα ότι μία από τις ρίζες της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός ρ.

i) Να δείξετε ότι ο αριθμός $-\rho$ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2-\lambda x-36=0$.

(Μονάδες 7)

ii) Να δείξετε ότι:

- $\rho\neq 0$ και
- ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $-36x^2+\lambda x+2=0$.

(Μονάδες 4+6 = 10)

ΘΕΜΑ Δ14

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4-8x^2-9=0$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση $x^4+\beta x^2+\gamma=0$ (1) με παραμέτρους $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι: Αν $\gamma<0$, τότε:

i) $\beta^2-4\gamma>0$

(Μονάδες 3)

ii) η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ Δ15

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60$ cm^2.

(Μονάδες 5)

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2^{ου} βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

(Μονάδες 5)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ16

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$ (1), με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $A = \dfrac{1}{\sqrt{S-P}}$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης (1) αντίστοιχα, έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε πραγματικό αριθμό λ.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ17

Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = \lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$ με $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες θετικές για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 10)

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου είναι τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε:

i) να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου.

(Μονάδες 4)

ii) να βρείτε την περίμετρο Π του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ και να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 4$ για κάθε $\lambda > 0$.

(Μονάδες 8)

iii) για την τιμή του λ που η περίμετρος γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 4, τι συμπεραίνετε για το ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

ΘΕΜΑ Δ18

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 7)

β) **i)** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο των ριζών.

(Μονάδες 2)

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες. Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ) **i)** Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 8)

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Δ19

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε μία διτετράγωνη εξίσωση της μορφής $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ η οποία να έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας λύνοντας την εξίσωση που κατασκευάσατε.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Δ20

α) Δίνεται η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε τη διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι: Αν $\beta < 0$, $\gamma > 0$ και $\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$, τότε η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ Δ21

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2-14x+8=0$ (1) και $8x^2-14x+3=0$ (2).

(Μονάδες 10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \ (3) \text{ και } \gamma x^2+\beta x+\alpha=0 \ (4), \text{ με } \alpha\cdot\gamma\neq 0$$

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\gamma\neq 0$, τότε:

i) $\rho\neq 0$ και

(Μονάδες 5)

ii) ο $\dfrac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ22

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2-5x+\alpha=0$, με παράμετρο $\alpha\neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αν $|\alpha|\leq\dfrac{5}{2}$, τότε η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικούς αριθμούς, που είναι αντίστροφοι μεταξύ τους.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης, όταν $\alpha=2$.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-5\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+2=0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ23

Δίνεται η εξίσωση $(x-2)^2=\lambda(4x-3)$, με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να γράψετε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, στην περίπτωση που έχει ρίζες πραγματικές και άνισες:

i) να υπολογίσετε τα $S=x_1+x_2$ και $P=x_1x_2$,

ii) να αποδείξετε ότι η παράσταση $A=(4x_1-3)(4x_2-3)$ είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ24

Δίνεται η εξίσωση $x^2-\lambda x-(\lambda^2+5)=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι δύο ρίζες της εξίσωσης (1), να βρεθούν οι τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $(x_1-2)(x_2-2)=-4$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ25

α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-3x-4=0$ (1).

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει:

$$\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$$

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1).

(Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ26

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ27

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ (1).

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες ίσες;

(Μονάδες 6)

γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), τότε να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ28

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δυο άνισες ρίζες.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού λ, οι δυο άνισες ρίζες της εξίσωσης ανήκουν στο διάστημα $(-2,4)$.

(Μονάδες 13)

ΘΕΜΑ Δ29

Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες της εξίσωσης είναι $p_1 = \alpha$ και $p_2 = -\frac{1}{\alpha}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρεθούν οι τιμές του α, ώστε $|p_1 - p_2| = 2$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Δ30

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους.

(Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $x_1 + x_2 = 2$.

(Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $x_1 - x_2 = 4$.

(Μονάδες 7)

ii) Να προσδιορίσετε τις ρίζες x_1, x_2 και την τιμή του λ.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ31

Τα σπίτια τεσσάρων μαθητών, της Άννας, του Βαγγέλη, του Γιώργου και της Δήμητρας βρίσκονται πάνω σε έναν ευθύγραμμο δρόμο, ο οποίος ξεκινάει από το σχολείο τους. Οι αποστάσεις των τεσσάρων σπιτιών από το σχολείο, s_A, s_B, s_Γ και s_Δ αντίστοιχα, ικανοποιούν τις σχέσεις $s_A < s_B$, $s_\Gamma = \dfrac{s_A + 3s_B}{4}$ και $|s_\Delta - s_A| = |s_\Delta - s_B|$.

Στον παρακάτω άξονα, το σχολείο βρίσκεται στο σημείο Ο και τα σημεία Α, Β παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών της Άννας και του Βαγγέλη αντίστοιχα.

α) Να τοποθετήσετε πάνω στον άξονα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Αν επιπλέον, οι τιμές των αποστάσεων σε Km ικανοποιούν τις σχέσεις $s_A + s_B = 1,4$ και $s_A \cdot s_B = 0,45$, τότε:

i) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που να έχει ρίζες τους αριθμούς s_A, s_B.

(Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε τις αποστάσεις s_A, s_B, s_Γ και s_Δ.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ32

Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε:

i) Να προσδιορίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0$$

(Μονάδες9)

ii) Για $\lambda = 1$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$x_1{}^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2{}^2$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ Δ33

Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0, \text{ με } \lambda \in (0,4)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda \in (0,4)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16;

Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ34

Οι πλευρές ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - 2x + \lambda(2-\lambda) = 0, \text{ με } \lambda \in (0,2)$$

α) Να βρείτε:

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου.

(Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου συναρτήσει του λ.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0,2)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1;
Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο;

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ35

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^0$) με κάθετες πλευρές που έχουν μήκη x, y τέτοια, ώστε $x + y = 10$.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο $E(x) = \frac{1}{2}(-x^2 + 10x)$, $x \in (0,10)$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E(x) \leq \frac{25}{2}$ για κάθε $x \in (0,10)$.

(Μονάδες 8)

γ) Για ποια τιμή του $x \in (0,10)$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με $\frac{25}{2}$;

Τι παρατηρείτε τότε για το τρίγωνο ΑΒΓ ;

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ36

Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο $\Pi = 40cm$. Αν x cm είναι το μήκος του παραλληλογράμμου, τότε:

α) να αποδείξετε ότι $0 < x < 20$,

(Μονάδες 4)

β) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x) = 20x - x^2$,

(Μονάδες 8)

γ) να αποδείξετε ότι ισχύει $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$,

(Μονάδες 6)

δ) να αποδείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10cm.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ37

Τέσσερις αθλητές, ο Αργύρης, ο Βασίλης, ο Γιώργος και ο Δημήτρης τερμάτισαν σε έναν αγώνα δρόμου με αντίστοιχους χρόνους (σε λεπτά) t_A, t_B, t_Γ, t_Δ, για τους οποίους ισχύουν οι σχέσεις:

$$t_A < t_B$$

$$t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} \quad \text{και}$$

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta|$$

α) i) Να δείξετε ότι $t_\Delta = \dfrac{t_A + t_B}{2}$.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τη σειρά με την οποία τερμάτισαν οι αθλητές. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

β) Δίνεται επιπλέον ότι ισχύει: $t_A + t_B = 6$ και $t_A \cdot t_B = 8$.

i) Να γράψετε μία εξίσωση 2^ου^ βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς t_A και t_B.

(Μονάδες 5)

ii) Να βρείτε τους χρόνους τερματισμού των τεσσάρων αθλητών.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Δ38

Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά (d + 1) cm.

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β.

(Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου.

(Μονάδες 12)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ39

Μια μπάλα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω, αφού διαγράψει μια τροχιά, μετά από κάποιο χρόνο θα πέσει στο έδαφος. Το ύψος h (σε m) από το έδαφος, στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t (σε sec) κατά την κίνησή της, προσδιορίζεται από τη συνάρτηση:

$$h(t) = -5t^2 + 10t + 1,05$$

α) Να βρείτε τις τιμές h(0), h(1), h(2) και να εξηγήσετε τι παριστάνουν στο πλαίσιο του προβλήματος.

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε μετά από πόσο χρόνο η μπάλα θα φτάσει στο έδαφος.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το ύψος στο οποίο βρίσκεται η μπάλα κάθε χρονική στιγμή t μπορεί να προσδιοριστεί και από τον τύπο:

$$h(t)=5\left[1,21-(t-1)^2\right]$$

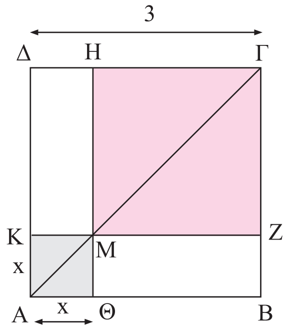
(Μονάδες 5)

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχει χρονική στιγμή t_1 (σε sec) που το ύψος h της μπάλας από το έδαφος θα είναι πάνω από 6,65 m.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ Δ40

Στο επόμενο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς ΑΒ = 3 και το Μ είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο της διαγωνίου ΑΓ. Έστω Ε το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος.



α) Να αποδείξετε ότι $E=2x^2-6x+9,\ x\in(0,3)$.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $E\geq\dfrac{9}{2}$ για κάθε $x\in(0,3)$.

(Μονάδες 8)

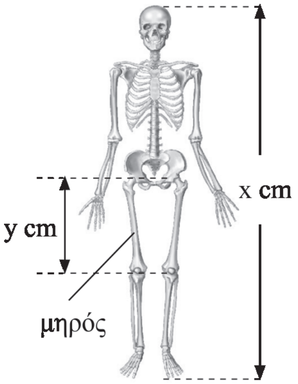
γ) Για ποια θέση του Μ πάνω στην ΑΓ το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, δηλαδή ίσο με $\dfrac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ Δ41

Οι ανθρωπολόγοι για να προσεγγίσουν το ύψος ενός ενήλικα, χρησιμοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις που παριστάνουν τη σχέση μεταξύ του μήκους y (σε cm) οστού του μηρού και του ύψους x (σε cm) του ενήλικα ανάλογα με το φύλο του:

Γυναίκα: $y = 0,43x - 26$ Άνδρας: $y = 0,45x - 31$



α) Ένας ανθρωπολόγος ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 38,5 cm που ανήκει σε γυναίκα. Να υπολογίσετε το ύψος της γυναίκας.

(Μονάδες 8)

β) Ο ανθρωπολόγος βρίσκει μεμονωμένα οστά χεριού, τα οποία εκτιμά ότι ανήκουν σε άντρα ύψους περίπου 164 cm. Λίγα μέτρα πιο κάτω ανακαλύπτει ένα μηριαίο οστό μήκους 42,8 cm που ανήκει σε άντρα. Είναι πιθανόν το μηριαίο οστό και τα οστά χεριού να προέρχονται από το ίδιο άτομο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν μπορεί ένας άνδρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους να έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους.

(Μονάδες 9)

Ακολουθούν προσομοιωμένα ανακεφαλαιωτικά Διαγωνίσματα στο 3ο Κεφάλαιο, σύμφωνα με τις οδηγίες του Ι.Ε.Π. και τη σχετική νομοθεσία για τη δομή, επιλογή και διάρθρωση των θεμάτων.

Διαγώνισμα 1

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $(\lambda-2)x=\lambda^2-4$ είναι ταυτότητα, αν $\lambda=2$.

Μονάδες 2

β) Η εξίσωση $x^{2\nu}=1$ έχει ακριβώς μία λύση, τη $x=1$.

Μονάδες 2

γ) Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$ και $\Delta=0$ έχει διπλή ρίζα, τη $x=-\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

Μονάδες 2

δ) Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ έχει δύο ρίζες και ισχύουν $S<0$ και $P>0$, τότε οι ρίζες είναι θετικές.

Μονάδες 2

ε) Η εξίσωση $|\alpha|x^2+\beta x-|\gamma|=0$ $(\alpha\neq 0)$ έχει δύο άνισες ρίζες.

Μονάδες 2

Α2. Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$, να αποδείξετε ότι το άθροισμα S και το γινόμενο P των ριζών είναι αντίστοιχα $S=-\dfrac{\beta}{\alpha}$ και $P=\dfrac{\gamma}{\alpha}$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν:

$$\alpha+\beta=-1 \text{ και } \alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12$$

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha\cdot\beta=-12$.

Μονάδες 10

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x^2-\mu x+\nu=0$ (1) με μ, $\nu\in\mathbb{N}-\{0\}$ και $\mu^2>4\nu$.

α) Να κατασκευάσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τις αντίθετες των ριζών της εξίσωσης (1).

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η (1) δεν έχει ρίζα το 0 και να κατασκευάσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τις αντίστροφες των ριζών της εξίσωσης (1).

Μονάδες 8

γ) Αν επιπλέον $\nu=\mu$:

i) Να βρείτε τα ν,μ, ώστε οι ρίζες της εξίσωσης (1) να διαφέρουν κατά $\sqrt{5}$.

Μονάδες 6

ii) Να βρείτε τα ν,μ, ώστε το τετράγωνο της μίας ρίζας της εξίσωσης (1) να είναι η άλλη της ρίζα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

α) Να λύσετε τις εξισώσεις $3x^2-14x+8=0$ (1) και $8x^2-14x+3=0$ (2).

Μονάδες 10

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \ (3) \text{ και } \gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0 \ (4), \text{ με } \alpha \cdot \gamma \neq 0$$

Αποδείξτε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι: Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha\gamma \neq 0$, τότε:

i) $\rho \neq 0$ και

Μονάδες 5

ii) ο $\frac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση (4).

Μονάδες 10

Διαγώνισμα 2

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν (α, β, γ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $(\lambda^2-4)x=\lambda-2$ είναι αδύνατη, αν $\lambda=-2$.

Μονάδες 2

β) Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$, με $\alpha>0$ και ν περιττό φυσικό αριθμό, έχει ακριβώς μία λύση, τη $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Μονάδες 2

γ) Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ έχει δύο ρίζες x_1, x_2 και ισχύει ότι $S=x_1+x_2=0$, τότε οι ρίζες είναι αντίστροφες.

Μονάδες 2

*Στις παρακάτω προτάσεις η σωστή απάντηση σε κάθε ερώτηση είναι **μόνο μία**. Να επιλέξετε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση της κάθε ερώτησης.*

δ) Αν S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών x_1, x_2 της εξίσωσης $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με $\alpha\neq 0$, τότε οι ρίζες είναι αρνητικές αν:

Α. $S<0$ και $P>0$ ***Β.*** $S<0$ και $P<0$

Γ. $S>0$ και $P<0$ ***Δ.*** $S>0$ και $P>0$

Μονάδες 2

ε) Η εξίσωση $\alpha^2x^2-\beta x-\gamma^2=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει:

Α. καμία ρίζα ***Β.*** δύο άνισες ρίζες

Γ. μία διπλή ρίζα ***Δ.*** τίποτα από τα προηγούμενα

Μονάδες 2

Α2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x+\beta=0$ με $\alpha\neq 0$ έχει ακριβώς μία λύση, τη $x=-\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$ με παράμετρο $\lambda\neq 2$.

Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες:

α) Η εξίσωση έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

Μονάδες 13

β) Το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης είναι ίσο με 2.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $x^2-\left(|\lambda-1|-2\right)x+\left(|2\lambda-2|-4\right)=0$ (1) με $\lambda\in\mathbb{R}$. Επιλέγουμε τυχαία μια τιμή $\lambda\in\Omega$, όπου $\Omega=\left\{-10,\ -9,\ -3,\ 0,\ \dfrac{1}{2},\ 3,\ \dfrac{10}{3},\ 11\right\}$ ο δειγματικός χώρος του πειράματος τύχης, του οποίου τα απλά ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Έστω Α, Β και Γ τα ενδεχόμενα του Ω που ορίζονται:

$A=\{\lambda\in\Omega\,/\,$ η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές και ίσες$\}$

$B=\{\lambda\in\Omega\,/\,$ η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες$\}$

$\Gamma=\{\lambda\in\Omega\,/\,$ η εξίσωση (1) να μην έχει καμία πραγματική ρίζα$\}$

Να βρείτε:

α) Την πιθανότητα του ενδεχομένου Α.

Μονάδες 8

β) Την πιθανότητα του ενδεχομένου Β.

Μονάδες 9

γ) Την πιθανότητα του ενδεχομένου Γ.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το τριώνυμο $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Μονάδες 8

β) Αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S=x_1+x_2$ συναρτήσει του $\lambda\neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P=x_1x_2$ των ριζών.

Μονάδες 5

γ) Αν $\lambda>0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές;
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6

δ) Για κάθε $\lambda>0$, αν x_1,x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου, να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1x_2}\leq\dfrac{x_1+x_2}{2}$.

Μονάδες 6

Ακολουθούν επαναληπτικά διαγωνίσματα που αφορούν στα Κεφάλαια 1ο, 2ο και 3ο, σύμφωνα με τις οδηγίες του Ι.Ε.Π. και τη σχετική νομοθεσία για τη δομή, επιλογή και διάρθρωση των θεμάτων στις προαγωγικές εξετάσεις.

Διαγώνισμα 1

Επαναληπτικό

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Δύο ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω είναι πάντα συμπληρωματικά.

Μονάδες 2

β) Για θετικούς αριθμούς α, β και θετικό ακέραιο ν ισχύει η ισοδυναμία:

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow \alpha^{\nu}=\beta^{\nu}$$

Μονάδες 2

γ) Για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ισχύει $|\alpha+\beta|=|\alpha|+|\beta|$.

Μονάδες 2

δ) Η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ είναι εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 2

ε) Αν η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ έχει δύο άνισες ρίζες x_1, x_2 και $P=x_1x_2=1$, τότε οι ρίζες είναι αντίστροφες.

Μονάδες 2

Α2. Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $|\alpha\cdot\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο πίνακας:

	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

Επιλέγουμε τυχαία έναν από τους εννέα διψήφιους αριθμούς του παραπάνω πίνακα. Να βρείτε την πιθανότητα πραγματοποίησης των παρακάτω ενδεχομένων:

Α: ο διψήφιος να είναι άρτιος

Μονάδες 7

Β: ο διψήφιος να είναι άρτιος και πολλαπλάσιο του 3

Μονάδες 9

Γ: ο διψήφιος να είναι άρτιος ή πολλαπλάσιο του 3

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Έστω οι αριθμοί x, y τέτοιοι, ώστε $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ και $y \in (-2,0) \cup \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

α) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η παράσταση:

$$A = 2x^2 + 3y + 1$$

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $B = \dfrac{y - 1 + \sqrt{(3y-1)^2}}{2y}$ είναι ανεξάρτητη του y.

Μονάδες 9

γ) Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Gamma = \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$ είναι ανεξάρτητη του x.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 7$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 7

β) **i)** Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να βρείτε την τιμή του αθροίσματος των ριζών και να εκφράσετε συναρτήσει του λ το γινόμενο των ριζών.

Μονάδες 2

ii) Να δείξετε ότι, για κάθε λ με $7 < \lambda < 16$, το τριώνυμο έχει δύο άνισες ομόσημες ρίζες.
Ποιο είναι τότε το πρόσημο των ριζών; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

γ) **i)** Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

ii) Έχει η εξίσωση (1) για $\lambda = 3\sqrt{10}$ τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 4

Διαγώνισμα 2

Επαναληπτικό

ΘΕΜΑ Α

Α1. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν (α, β, γ), γράφοντας στην κόλλα σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν τα Α και Β θεωρούνται ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού, τότε η λεκτική ερμηνεία του $\omega \in A - B$ είναι: «Πραγματοποιείται μόνο το Α.»

Μονάδες 2

β) Αν Α ένα ενδεχόμενο ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε ονομάζουμε πιθανότητα του ενδεχομένου Α τον αριθμό $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$, όπου N(A) και N(Ω) το πλήθος των ευνοϊκών και δυνατών περιπτώσεων αντίστοιχα.

Μονάδες 2

γ) Για κάθε $\alpha \geq 0$ ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$.

Μονάδες 2

*Στις παρακάτω ερωτήσεις να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης Α **με ένα μόνο** στοιχείο της στήλης Β, ώστε να προκύπτουν ισότητες. Στη στήλη Β υπάρχει ένα επιπλέον στοιχείο.*

δ)

ΣΤΗΛΗ Α	***ΣΤΗΛΗ Β***
1. $P(A')$	α. $P(B) - P(A \cap B)$
2. $P(B - A)$	β. 0
3. $P(\Omega)$	γ. $1 - P(A)$
	δ. 1

Μονάδες 2

ε)

ΣΤΗΛΗ Α (α,β > 0, ν θετικός ακέραιος και μ ακέραιος)	**ΣΤΗΛΗ Β**
1. $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}$	α. $\sqrt[\mu]{\alpha^{\nu}}$
2. $\sqrt[\nu]{\dfrac{\alpha}{\beta}}$	β. $\sqrt[\nu]{\alpha\beta}$
3. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$	γ. $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$
	δ. $\dfrac{\sqrt[\nu]{\alpha}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$

Μονάδες 2

Α2. Θεωρούμε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ $(\alpha\neq 0)$ και τη διακρίνουσά της $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$. Να αποδείξετε ότι αν $\Delta>0$, τότε η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες, τις $x_{1,2}=\dfrac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$.

Μονάδες 15

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η παράσταση $A=|3x-6|+2$, όπου ο x είναι πραγματικός αριθμός.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) για κάθε $x\geq 2$, $A=3x-4$,

ii) για κάθε $x<2$, $A=8-3x$.

Μονάδες 12

β) Αν για τον x ισχύει ότι $x\geq 2$, να αποδείξετε ότι $\dfrac{9x^2-16}{|3x-6|+2}=3x+4$.

Μονάδες 13

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση $P(A)x^2 - 2P(A \cup B)x + 4P(B) = 0$ (1), όπου $P(A)$ και $P(B)$ οι πιθανότητες δύο ασυμβίβαστων ενδεχομένων A και B αντίστοιχα, ενός δειγματικού χώρου Ω.

α) Ποια είναι η συνθήκη για το ενδεχόμενο A, ώστε η εξίσωση (1) να είναι εξίσωση 2ου βαθμού;

Μονάδες 5

β) Να λύσετε την εξίσωση (1), αν είναι 1ου βαθμού.

Μονάδες 5

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 9

δ) Αν $A \neq \varnothing$ και η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα, να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ισοπίθανα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

α) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο $\Pi = 34$ cm και διαγώνιο $\delta = 13$ cm.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι $E = 60\ \text{cm}^2$.

Μονάδες 5

ii) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

Μονάδες 5

iii) Να βρείτε τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου.

Μονάδες 5

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν $40\ \text{cm}^2$ και διαγώνιο 8 cm.

Μονάδες 10

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο

Οι πραγματικοί αριθμοί

- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ
- ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις
στις ερωτήσεις του σχολικού βιβλίου

Ι.

Αριθμός Ερώτησης	Απάντηση	Σχόλιο
1	Ψ	Δεν ισχύει η συνεπαγωγή $\alpha+\gamma=\beta+\delta \Rightarrow \alpha=\beta$ και $\gamma=\delta$.
2	Ψ	Αφού αν $\alpha=0$ και $\beta\neq 0$, τότε δεν ισχύει η συνεπαγωγή: $\alpha^2=\alpha\beta \Rightarrow \alpha=\beta$
3	Ψ	Γενικά ισχύει $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $(\alpha,\beta)=(0,0)$, για $(\alpha,\beta)=(1,0)$ και για $(\alpha,\beta)=(0,1)$.
4	Ψ[1]	Οι αριθμοί $1-\sqrt{3}$ και $1+\sqrt{3}$ είναι άρρητοι, ενώ το άθροισμα τους όχι, αφού $(1-\sqrt{3})+(1+\sqrt{3})=2$.
5	Ψ[2]	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{8}=\sqrt{16}=4$
6	Α	
7	Ψ	Ισχύει μόνο αν $\alpha>0$.
8	Ψ	Ισχύει μόνο αν $\beta>0$.
9	Α	
10	Ψ	
11	Α	
12	Ψ	π.χ. $-1>-2$ και $-2>-3$, ενώ δεν ισχύει $2>6$.
13	Ψ	
14	Α	$4\alpha^2-20\alpha\beta+25\beta^2=(2\alpha-5\beta)^2\geq 0$
15	Α	
16	Ψ	Ισχύει ως ισότητα αν $\alpha=-1$.
17	Α	
18	Α	
19	Ψ	π.χ. $(-2)^2=4$, αλλά $\sqrt{4}=2$ και όχι -2 (πρέπει $\alpha>0$).
20	Ψ	Γενικά ισχύει $\sqrt{\alpha^2}=\lvert\alpha\rvert$.
21	Α	

1. Ορθή διατύπωση: Το άθροισμα δύο άρρητων αριθμών είναι πάντα άρρητος.
2. Ορθή διατύπωση: Το γινόμενο δύο άρρητων αριθμών είναι πάντα άρρητος.

Αριθμός Ερώτησης	Απάντηση	Σχόλιο
22	Ψ	Μπορεί να είναι $\alpha\beta \geq 0$ και να έχουμε $\alpha \leq 0$ και $\beta \leq 0$.
23	Ψ	Είναι $\sqrt{\alpha^2\beta} = \lvert\alpha\rvert\sqrt{\beta}$.
24	Ψ	Ισχύει μόνο αν $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ και $(\alpha, \beta) = (1, 0)$.
25	Α	
26	Ψ	Αν $\alpha < 0$, δεν ισχύει.
27	Α	$\sqrt[25]{5^{25}} = 5$, $\sqrt[25]{25^5} = \sqrt[5]{25}$ και $5 > \sqrt[5]{25}$, άρα $5^{25} > 25^5$.
28	Α	

II.

Αρ. Ερώτησης	Απάντηση	Σχόλιο
1	Δ	• $x > 2 \Leftrightarrow x - 2 > 0$, άρα $\lvert x-2\rvert = x - 2$ • $x < 5 \Leftrightarrow x - 5 < 0$, άρα $\lvert x-5\rvert = -x + 5$ Επομένως $\lvert x-2\rvert + \lvert x-5\rvert = 3$.
2	Δ	• $x > 10 \Leftrightarrow x - 10 > 0$, άρα $\lvert x-10\rvert = x - 10$ • $x < 20 \Leftrightarrow x - 20 < 0$, άρα $\lvert x-20\rvert = -(x - 20)$ Επομένως $\frac{\lvert x-10\rvert}{x-10} + \frac{\lvert x-20\rvert}{x-20} = 1 - 1 = 0$.
3	Δ	$\beta < \gamma \Leftrightarrow \sqrt{2} < \sqrt[3]{3} \Leftrightarrow \left(\sqrt{2}\right)^6 < \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 \Leftrightarrow 2^3 < 3^2$ $\gamma < \alpha \Leftrightarrow \sqrt[3]{3} < \sqrt[6]{10} \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{3}\right)^6 < \left(\sqrt[6]{10}\right)^6 \Leftrightarrow 3^2 < 10$
4	Γ	Αφού $(2+\sqrt{5})^2 = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = 9 + 4\sqrt{5}$.

III.

Γ	Δ	Ε	Ζ	Η	Θ
α^3	α^2	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	β^2	β^3

Απαντήσεις
στις ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α.1.1. Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Λ	Σ	Λ	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ	Σ	Λ

25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ	Σ	Λ	Λ

Α.1.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Β	Α	Γ	Γ	Γ	Β	Α	Δ	Α	Δ

Α.1.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1.

1	2	3
γ	α	β

2.

1	2	3
δ	γ	α

3.

1	2	3
δ	γ	β

4.

1	2	3
β	δ	γ

5.

1	2	3
δ	α	γ

Λύσεις ασκήσεων
της Τράπεζας Θεμάτων

ΘΕΜΑ Β

Β1. α) Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση Κ, θα πρέπει να ισχύουν συγχρόνως:

$$x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2 \text{ και } x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 3$$

Ακόμα πρέπει:

- $x^2+4x+4=(x+2)^2\geq 0$, που αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- $x^2-6x+9=(x-3)^2\geq 0$, που επίσης αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η παράσταση Κ έχει νόημα πραγματικού αριθμού για όλα τα $x\in\mathbb{R}-\{-2,3\}$.

β) Έχουμε:

$$K=\frac{\sqrt{x^2+4x+4}}{x+2}-\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{x-3}=\frac{\sqrt{(x+2)^2}}{x+2}-\frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}=\frac{|x+2|}{x+2}-\frac{|x-3|}{x-3}$$

και επειδή $\left\{\begin{matrix} x+2>0 \\ x-3<0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} |x+2|=x+2 \\ |x-3|=-(x-3) \end{matrix}\right\}$, θα είναι:

$$K=\frac{x+2}{x+2}+\frac{x-3}{x-3}\Leftrightarrow K=1+1\Leftrightarrow K=2$$

δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Β2. α) Έχουμε:

$$\sqrt{20}=\sqrt{4\cdot 5}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}\cong 2\cdot 2,24=4,48$$
$$\sqrt{45}=\sqrt{9\cdot 5}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{5}\cong 3\cdot 2,24=6,72$$
$$\sqrt{80}=\sqrt{16\cdot 5}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{5}=4\sqrt{5}\cong 4\cdot 2,24=8,96$$

β) Με βάση και τα παραπάνω, έχουμε (χωρίς να χρησιμοποιήσουμε προσεγγίσεις):

$$M=\frac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}=\frac{3\cdot 2\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}+4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=\frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=5$$

Β3. **α)** Αναπτύσσοντας το 1ο μέλος έχουμε:

$$(x-1)^2+(y+3)^2=x^2-2x+1+y^2+6y+9=x^2+y^2-2x+6y+10$$

β) $x^2+y^2-2x+6y+10=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1=0 \text{ και } y+3=0) \Leftrightarrow (x=1 \text{ και } y=-3)$

Β4. **α)** Έχουμε:

$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\le -2 \Leftrightarrow \alpha+\dfrac{1}{\alpha}+2\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2+1+2\alpha}{\alpha}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha}\le 0$, που είναι αληθής για κάθε $\alpha<0$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\alpha=-1$)

β) Έχουμε διαδοχικά $|\alpha|+\left|\dfrac{1}{\alpha}\right|\ge 2 \Leftrightarrow |\alpha|+\dfrac{1}{|\alpha|}\ge 2$.

Αφού $\alpha<0$, θα είναι $|\alpha|=-\alpha$ και η προηγούμενη σχέση γίνεται

$-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\ge 2 \Leftrightarrow \alpha+\dfrac{1}{\alpha}\le -2$, που είναι αληθής από το ερώτημα (α).

Β5. **α)** Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες $\left.\begin{cases}2\le x\le 3\\ 1\le y\le 2\end{cases}\right\}$, θα έχουμε $3\le x+y\le 5$. Άρα η παράσταση $x+y$ βρίσκεται μεταξύ των ορίων 3 και 5.

β) Είναι $\left.\begin{cases}2\le x\le 3\\ 1\le y\le 2\end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases}4\le 2x\le 6\\ -6\le -3y\le -3\end{cases}\right\}$ και προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες, έχουμε $-2\le 2x-3y\le 3$. Άρα η παράσταση $2x-3y$ βρίσκεται μεταξύ των ορίων -2 και 3.

γ) Είναι $2\le x\le 3\,(1)$ και $\dfrac{1}{2}\le\dfrac{1}{y}\le 1\,(2)$ (από τις γνωστές ιδιότητες των ανισοτήτων).

Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (1) και (2) (αφού είναι θετικά όλα τα μέλη των ανισοτήτων), έχουμε $1\le\dfrac{x}{y}\le 3$. Άρα η παράσταση $\dfrac{x}{y}$ βρίσκεται μεταξύ των ορίων 1 και 3.

Β6. **α)** Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|\geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|}{|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{|\alpha|^2}{|\alpha||\beta|}+\frac{|\beta|^2}{|\alpha||\beta|}\geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\alpha|^2+|\beta|^2}{|\alpha||\beta|}\geq 2 \Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2\geq 2|\alpha||\beta| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\alpha|^2+|\beta|^2-2|\alpha||\beta|\geq 0 \Leftrightarrow \left(|\alpha|-|\beta|\right)^2\geq 0$$

η οποία είναι προφανώς αληθής για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}$.

β) Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν $\left(|\alpha|-|\beta|\right)^2=0\Leftrightarrow|\alpha|=|\beta|$, δηλαδή όταν $\alpha=\beta$ ή όταν $\alpha=-\beta$ $\left(\text{με } \alpha,\beta\in\mathbb{R}-\{0\}\right)$.

Πράγματι είναι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|+\left|\frac{\beta}{\alpha}\right|=\left|\frac{\alpha}{\alpha}\right|+\left|\frac{\beta}{\beta}\right|=1+1=2.$

Β7. **α)** Η περίμετρος του ορθογωνίου είναι $\Pi=(2x+2y)$ εκατοστά. Τώρα έχουμε:

$$\left.\begin{cases}4\leq x\leq 7\\ 2\leq y\leq 3\end{cases}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{cases}8\leq 2x\leq 14 & (1)\\ 4\leq 2y\leq 6 & (2)\end{cases}\right\}$$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη, έχουμε:

$$12\leq 2x+2y\leq 20, \text{ δηλαδή } 12\leq\Pi\leq 20$$

Επομένως τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου Π είναι από 12 έως 20 εκατοστά.

β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, οι διαστάσεις του νέου ορθογωνίου θα είναι $x-1$ και $3y$ εκατοστά. Άρα η περίμετρος Π_1 του νέου ορθογωνίου θα είναι:

$$\Pi_1=2(x-1)+2\cdot 3y=(2x+6y-2) \text{ εκατοστά}$$

Τώρα έχουμε:

$$2\leq y\leq 3\Leftrightarrow 12\leq 6y\leq 18 \quad (3)$$

Προσθέτοντας τις (1) και (3) κατά μέλη, έχουμε:

$$20\leq 2x+6y\leq 32\Leftrightarrow 18\leq 2x+6y-2\leq 30\Leftrightarrow 18\leq\Pi_1\leq 30$$

Δηλαδή τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή της περιμέτρου Π_1 του νέου ορθογωνίου είναι από 18 έως 30 εκατοστά.

Β8. **α)** Έχουμε $3 \le x \le 5 \Leftrightarrow -5 \le -x \le -3$ (1) και $-2 \le y \le -1$ (2). Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη, έχουμε $-7 \le y - x \le -4$. Άρα τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται η παράσταση $y - x$ είναι από -7 έως -4.

β) Έχουμε $3 \le x \le 5 \Rightarrow 9 \le x^2 \le 25$ (3) (αφού τα μέλη της είναι θετικοί αριθμοί).

Ακόμα $-2 \le y \le -1 \Rightarrow 1 \le -y \le 2 \Rightarrow 1 \le y^2 \le 4$ (4) (δημιουργήσαμε ανισότητα με θετικά μέλη $-2 \le y \le -1 \Rightarrow 1 \le -y \le 2$).

Προσθέτοντας τις (3) και (4) κατά μέλη, έχουμε $10 \le x^2 + y^2 \le 29$. Άρα τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται η παράσταση $x^2 + y^2$ είναι από 10 έως 29.

Β9. **α)** Για την παράσταση Α πρέπει $(x-2)^2 \ge 0$, που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Για την παράσταση Β πρέπει $(2-x)^3 \ge 0 \Leftrightarrow 2 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 2$ ή $x \in (-\infty, 2]$.

γ) Για $x \le 2$ ορίζονται και οι δύο παραστάσεις Α και Β και άρα:

- $A = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2| = 2 - x$
- $B = \sqrt[3]{(2-x)^3} = |2-x| = 2 - x$

Άρα $A = B$ για κάθε $x \le 2$.

Β10. **α)** Έχουμε διαδοχικά:

$$A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[6]{5} = 5^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{6}} = 5^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{15}$$

β) Υψώνουμε στην 6^{η}, αφού Ε.Κ.Π.(2, 3) = 6, και έχουμε:

$$A^6 = (\sqrt[3]{5})^6 = 5^2 = 25 \text{ και } B^6 = (\sqrt{3})^6 = 3^3 = 27$$

Άρα $B^6 > A^6 \Leftrightarrow B > A$ (επειδή οι Α και Β είναι θετικοί αριθμοί).

Β11. **α)** Έχουμε $2 \le \alpha \le 4$ (1) και $-4 \le \beta \le -3 \Leftrightarrow 6 \le -2\beta \le 8$ (2). Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2), έχουμε $8 \le \alpha - 2\beta \le 12$. Άρα τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η παράσταση $\alpha - 2\beta$ είναι από 8 έως 12.

β) Έχουμε $2 \le \alpha \le 4 \Rightarrow 4 \le \alpha^2 \le 16$ (3). Από τις (1) και (2) με πολλαπλασιασμό κατά μέλη (αφού όλοι οι όροι είναι θετικοί), προκύπτει ότι $12 \le -2\alpha\beta \le 32$ (4). Από τις (3) και (4) με πρόσθεση κατά μέλη, έχουμε $16 \le \alpha^2 - 2\alpha\beta \le 48$. Άρα τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η παράσταση $\alpha^2 - 2\alpha\beta$ είναι από 16 έως 48.

Β12. α) Έχουμε $A \cdot B = (2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3}) = 4-(\sqrt{3})^2 = 4-3 = 1$.

β) **Α΄τρόπος:** Έχουμε:

- $A^2 = (2-\sqrt{3})^2 = 4-4\sqrt{3}+3 = 7-4\sqrt{3}$
- $B^2 = (2+\sqrt{3})^2 = 4+4\sqrt{3}+3 = 7+4\sqrt{3}$
- $\Pi = A^2 + B^2 = 7-4\sqrt{3}+7+4\sqrt{3} = 14$

Β΄τρόπος: Έχουμε:

$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB \Rightarrow 4^2 = A^2 + B^2 + 2 \Rightarrow A^2 + B^2 = 14$

Β13. α) Αντικαθιστώντας τις παραστάσεις Κ και Λ, έχουμε διαδοχικά:

$K - \Lambda = (2\alpha^2 + \beta^2 + 9) - 2\alpha(3-\beta) = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta =$

$= \alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2 + 9 - 6\alpha + 2\alpha\beta = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$

β) Με βάση το ερώτημα (α), για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, έχουμε ισοδύναμα:

$K - \Lambda \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9) \ge 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-3)^2 \ge 0$

που είναι αληθής για κάθε α, $\beta \in \mathbb{R}$ (ως άθροισμα μη αρνητικών όρων).

γ) Με βάση και τα προηγούμενα ερωτήματα, έχουμε:

$K = \Lambda \Leftrightarrow K - \Lambda = 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 + (\alpha-3)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta = 0$ και $\alpha - 3 = 0) \Leftrightarrow (\beta = -\alpha$ και $\alpha = 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha = 3$ κα $\beta = -3)$

Β14. α) $\dfrac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \dfrac{\alpha}{\beta} \Leftrightarrow \beta(\alpha^2+1) = \alpha(\beta^2+1) \Leftrightarrow \alpha^2\beta + \beta = \alpha\beta^2 + \alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2\beta - \alpha\beta^2 + \beta - \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha-\beta) - (\alpha-\beta) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha\beta-1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta=0 \text{ ή } \alpha\beta-1=0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(\alpha=\beta \text{ (απορρίπτεται) ή } \alpha\beta=1\right)$

Δηλαδή οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

β) Χρησιμοποιώντας το συμπέρασμα του ερωτήματος (α), έχουμε διαδοχικά:

$$K = \frac{\alpha^{22}(\beta^3)^8}{\alpha^{-2}(\alpha\beta)^{25}} = \frac{\alpha^{22}\beta^{24}}{\alpha^{-2}\alpha^{25}\beta^{25}} = \frac{\alpha^{22}\beta^{24}}{\alpha^{23}\beta^{25}} = \frac{(\alpha\beta)^{22}\beta^2}{(\alpha\beta)^{23}\beta^2} = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{1} = 1$$

Β15. α) Για να ορίζεται η παράσταση Α, θα πρέπει να ισχύουν:

$$x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 4 \text{ και } x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$$

Οι κοινές λύσεις τους είναι για κάθε $x \in [4,+\infty)$.

β) Για κάθε $x \in [4,+\infty)$, έχουμε:

$A = \left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x-4}-\sqrt{x+1}\right) = \left(\sqrt{x-4}\right)^2 - \left(\sqrt{x+1}\right)^2 =$
$= (x-4)-(x+1) = x-4-x-1 = -5$

Άρα $A=-5$, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Β16. α) Έχουμε διαδοχικά:

$$d(2x,3) = 3-2x \Leftrightarrow |2x-3| = 3-2x \Leftrightarrow |3-2x| = 3-2x$$

Από τον τον ορισμό της απόλυτης τιμής πραγματικού αριθμού, προκύπτει:

$$3-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

β) Επειδή $3-2x \geq 0 \Leftrightarrow 2x-3 \leq 0$ (που προέκυψε από το ερώτημα (α)) και $x \leq \frac{3}{2} < 3 \Leftrightarrow x < 3 \Leftrightarrow 3-x > 0$, έχουμε $|2x-3| = 3-2x$ και $|3-x| = 3-x$. Άρα:

$$K = |2x-3| - 2|3-x| = 3-2x-2(3-x) = 3-2x-6+2x = -3$$

δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Β17. α) Υψώνουμε όλα τα μέλη της ανισότητας στην 3^{η} δύναμη και έχουμε ισοδύναμα:

$$3<\sqrt[3]{30}<4 \Leftrightarrow 3^3<\left(\sqrt[3]{30}\right)^3<4^3 \Leftrightarrow 27<30<64$$

η οποία είναι προφανώς αληθής.

β) $\sqrt[3]{30}>6-\sqrt[3]{30} \Leftrightarrow 2\sqrt[3]{30}>6 \Leftrightarrow \left(2\sqrt[3]{30}\right)^3>6^3 \Leftrightarrow 8\cdot 30>216 \Leftrightarrow 240>216$, που είναι προφανώς αληθής[3].

Β18. α) Για να ορίζεται η παράσταση $A=\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}$, θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$$x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4 \text{ και } 6-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 6$$

των οποίων οι κοινές λύσεις είναι $4\leq x\leq 6$ ή σε μορφή διαστήματος $x\in[4,6]$.

β) Για $x=5\in[4,6]$, η παράσταση Α γίνεται:

$$A=\sqrt{5-4}+\sqrt{6-5} \Leftrightarrow A=2$$

Επομένως $A^2+A-6=2^2+2-6=0$.

Β19. α) Για να ορίζεται η παράσταση $A=\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x-4}$, θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις:

$x^2+4\geq 0$, που αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $x-4\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 4$

των οποίων οι κοινές λύσεις είναι για $x\geq 4$ ή σε μορφή διαστήματος $x\in[4,+\infty)$.

β) Για $x=4$, έχουμε $A=\sqrt{16+4}-\sqrt{4-4}=\sqrt{20}$ και έτσι θα είναι:

$$A^2-A=\left(\sqrt{20}\right)^2-\sqrt{20}=20-\sqrt{20}=20-\sqrt{4\cdot 5}=20-2\sqrt{5}=$$
$$=2(10-\sqrt{5})$$

Β20. α) Για να ορίζεται η παράσταση $A=\sqrt{1-x}-\sqrt[4]{x^4}=\sqrt{1-x}-|x|$, θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις $1-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 1$ και $x^4\geq 0$, που αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Οι κοινές λύσεις τους είναι για $x\leq 1$ ή σε μορφή διαστήματος $x\in(-\infty,1]$.

---

3. Μπορούμε να αποδείξουμε τη σχέση αυτή και κατασκευαστικά. Είναι:

$3<\sqrt[3]{30}<4 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 2<6-\sqrt[3]{30}<3 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow 6-\sqrt[3]{30}<\sqrt[3]{30}$

β) Για $x=-3\in(-\infty,1]$, έχουμε $A=\sqrt{4}-|-3|=2-3=-1$ και άρα:

$$A^3+A^2+A+1=(-1)^3+(-1)^2+(-1)+1=-1+1-1+1=0$$

Β21. α) Για να ορίζεται η παράσταση $B=\sqrt[5]{(x-2)^5}$, θα πρέπει:

$$(x-2)^5\geq 0 \Leftrightarrow x-2\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 2$$

ή σε μορφή διαστήματος $x\in[2,+\infty)$.

β) Για $x=4\in[2,+\infty)$, έχουμε $B=4-2=2$ και άρα:

$$B^2+6B=2^2+6\cdot 2=16=B^4$$

Β22. α) Είναι $A=\left(\sqrt{2}\right)^6$, $B=\left(\sqrt[3]{2}\right)^6$ και έτσι έχουμε:

$$A-B=\left(\sqrt{2}\right)^6-\left(\sqrt[3]{2}\right)^6=\left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^3-\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^3\right]^2=2^3-2^2=8-4=4$$

β) Έχουμε $A-B=4>0\Leftrightarrow A>B\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}\right)^6>\left(\sqrt[3]{2}\right)^6\Leftrightarrow\sqrt{2}>\sqrt[3]{2}$.

Ακόμα είναι προφανές ότι $\sqrt[3]{2}>1\Leftrightarrow 2>1$. Συνεπώς, η διάταξη από το μικρότερο στο μεγαλύτερο είναι $1<\sqrt[3]{2}<\sqrt{2}$.

Β23. α) Έχουμε:

$$A=\left(\sqrt{2}\right)^6=\left[\left(\sqrt{2}\right)^2\right]^3=2^3=8$$

$$B=\left(\sqrt[3]{3}\right)^6=\left[\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\right]^2=3^2=9$$

$$\Gamma=\left(\sqrt[6]{6}\right)^6=6$$

Άρα $A+B+\Gamma=8+9+6=23$.

β) Αφού $B>\Gamma\Leftrightarrow\left(\sqrt[3]{3}\right)^6>\left(\sqrt[6]{6}\right)^6\Leftrightarrow\sqrt[3]{3}>\sqrt[6]{6}$.

Β24. α) Έχουμε $|x+1|<2\Leftrightarrow d(x,-1)<2\Leftrightarrow -2<x+1<2\Leftrightarrow -3<x<1$ ή $x\in(-3,1)$.

β) Επειδή $x > -3 \Leftrightarrow x + 3 > 0$, θα είναι $|x+3| = x+3$ και αφού ισχύει $x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0$, θα είναι $|x-1| = -(x-1)$. Άρα:

$$K = \frac{|x+3|+|x-1|}{4} = \frac{(x+3)-(x-1)}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

δηλαδή αριθμός ανεξάρτητος του x.

B25. α) Επειδή $x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0$, θα είναι $|x-1| = x-1$. Ακόμα, επειδή ισχύει $y < 3 \Leftrightarrow y - 3 < 0$, θα είναι $|y-3| = 3-y$. Άρα:

$$A = (x-1)+(3-y) = x-y+2$$

β) Έχουμε $1 < x < 4$ (1) και $2 < y < 3 \Leftrightarrow -3 < -y < -2$ (2). Προσθέτοντας τις (1) και (2) κατά μέλη, παίρνουμε:

$$-2 < x-y < 2 \Leftrightarrow 0 < x-y+2 < 4 \Leftrightarrow 0 < A < 4$$

B26. α) Έχουμε:

i) Για $x \geq 2 \Leftrightarrow 3x \geq 6 \Leftrightarrow 3x-6 \geq 0$, θα είναι $|3x-6| = 3x-6$ και άρα:

$$A = |3x-6|+2 = 3x-6+2 = 3x-4$$

ii) Για $x < 2 \Leftrightarrow 3x < 6 \Leftrightarrow 3x-6 < 0$, θα είναι $|3x-6| = 6-3x$ και άρα:

$$A = |3x-6|+2 = 6-3x+2 = 8-3x$$

β) Από το ερώτημα (α) για $x \geq 2$, είναι $A = 3x-4$. Έτσι έχουμε διαδοχικά:

$$\frac{9x^2-16}{|3x-6|+2} = \frac{(3x)^2-4^2}{A} = \frac{(3x-4)(3x+4)}{3x-4} = 3x+4$$

B27. α) Έχουμε:

$$\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+4}{\alpha} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+4}{\alpha} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha^2+4-4\alpha}{\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\alpha-2)^2}{\alpha} \geq 0$$

η οποία είναι αληθής για κάθε $\alpha > 0$.

β) Από το ερώτημα (α) έχουμε $\alpha+\frac{4}{\alpha}\geq 4$ (I). Αφού $\beta>0$, θα ισχύει επίσης $\beta+\frac{4}{\beta}\geq 4$ (I) (II). Επειδή όλοι οι όροι των ανισοτήτων (I) και (II) είναι θετικοί, πολλαπλασιάζουμε τις ανισότητες (I) και (II) κατά μέλη και έχουμε: $\left(\alpha+\frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta+\frac{4}{\beta}\right)\geq 16$

Β28. α) Έχουμε διαδοχικά:

$$K-\Lambda=2\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=$$
$$=(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)+\alpha^2=(\alpha-\beta)^2+\alpha^2\geq 0$$

Επομένως $K\geq\Lambda$ για κάθε τιμή των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

β) Είναι $K=\Lambda\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2+\alpha^2=0\Leftrightarrow(\alpha-\beta=0$ και $\alpha=0)$. Άρα η ισότητα $K=\Lambda$ ισχύει όταν $\alpha=\beta=0$ και τότε $K=\Lambda=0$.

Β29. α) Έχουμε $|y-3|<1\Leftrightarrow d(y,3)<1\Leftrightarrow -1<y-3<1\Leftrightarrow 2<y<4$.

β) Είναι $\left\{\begin{array}{l}1<x<3\ (1)\\2<y<4\ (2)\end{array}\right\}$. Πολλαπλασιάζοντας τις (1) και (2) κατά μέλη (αφού όλοι οι όροι είναι θετικοί), θα έχουμε $2<xy<12$ ή $2<E<12$ και άρα τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή του εμβαδού Ε του ορθογωνίου είναι από 2 έως 12 τ.μ.

Β30. α) Έχουμε $|y-3|<1\Leftrightarrow d(y,3)<1\Leftrightarrow -1<y-3<1\Leftrightarrow 2<y<4$.

β) Η περίμετρος Π του ορθογωνίου με διαστάσεις x και y είναι:

$$\Pi=2x+2y$$

Έχουμε: $\left\{\begin{array}{l}1<x<3\ (1)\\2<y<4\ (2)\end{array}\right\}$. Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

$$3<x+y<7\ \text{ ή }\ 6<2x+2y<14\ \text{ ή }\ 6<\Pi<14$$

B31. α) Έχουμε $\frac{\alpha+\beta}{\beta}=4 \Leftrightarrow 4\beta=\alpha+\beta \Leftrightarrow 3\beta=\alpha$. Ακόμα:

$$\frac{\gamma}{\delta-\gamma}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow 4\gamma=\delta-\gamma \Leftrightarrow 5\gamma=\delta$$

β) Αντικαθιστώντας τα α και δ από το ερώτημα (α), έχουμε:

$$\Pi=\frac{\alpha\gamma+\beta\gamma}{\beta\delta-\beta\gamma}=\frac{3\beta\gamma+\beta\gamma}{5\beta\gamma-\beta\gamma}=\frac{4\beta\gamma}{4\beta\gamma}=1$$

B32. α) Θα πρέπει να ισχύει $x-4y\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 4y$. Τότε έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{4x+5y}{x-4y}=-2 \Leftrightarrow 4x+5y=-2x+8y \Leftrightarrow 6x=3y \Leftrightarrow y=2x$$

β) Για την παράσταση Α έχουμε διαδοχικά:

$$A=\frac{2x^2+3y^2+xy}{xy}=\frac{2x^2+3(2x)^2+x\cdot 2x}{x\cdot 2x}=\frac{2x^2+12x^2+2x^2}{2x^2}=\frac{16x^2}{2x^2}=8$$

B33. α) Επειδή δίνεται ότι $5<x<10$, θα έχουμε:

- $x>5 \Leftrightarrow x-5>0$ και άρα $|x-5|=x-5$
- $x<10 \Leftrightarrow x-10<0$ και άρα $|x-10|=-(x-10)=10-x$

β) Για την παράσταση Α έχουμε:

$$A=\frac{|x-5|}{x-5}+\frac{|x-10|}{x-10}=\frac{x-5}{x-5}+\frac{-(x-10)}{x-10}=1-1=0$$

$\big($ισχύουν $x-5\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 5$ και $x-10\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 10$, αφού $x\in(5,10)\big)$.

B34. α) Επειδή $1<x<2$, έχουμε $x>1 \Leftrightarrow x-1>0$. Άρα $|x-1|=x-1$. Ακόμα έχουμε $x<2 \Leftrightarrow x-2<0$, άρα $|x-2|=2-x$. Έτσι η παράσταση Α γίνεται:

$$A=|x-1|-|x-2|=x-1-(2-x)=x-1-2+x=2x-3$$

Άρα $A=2x-3$.

β) Για $x<1$ έχουμε $x<1 \Leftrightarrow x-1<0$ και άρα $|x-1|=1-x$. Ακόμα έχουμε $x<1<2 \Leftrightarrow x-2<0$ και άρα $|x-2|=2-x$. Έτσι η παράσταση Α γίνεται:

$$A=|x-1|-|x-2|=1-x-(2-x)=1-x-2+x=-1$$

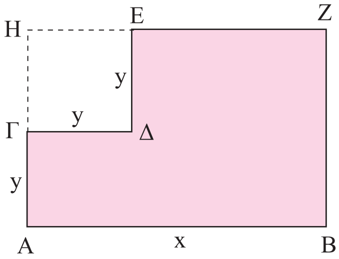
Άρα $A=-1$, δηλαδή ανεξάρτητη του x.

Β35. α) Η περίμετρος Π του γραμμοσκιασμένου σχήματος είναι:

$$\Pi=(\Gamma\Delta)+(\mathrm{E}\Delta)+(\mathrm{EZ})+(\mathrm{ZB})+(\mathrm{AB})+(\mathrm{A}\Gamma) \ (1)$$

Επειδή $\mathrm{EZ}=x-y$, η (1) θα δώσει:

$$\Pi=y+y+(x-y)+2y+x+y=2x+4y$$



β) Έχουμε $5<x<8 \Leftrightarrow 10<2x<16$ (2) και $1<y<2 \Leftrightarrow 4<4y<8$ (3). Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (3), θα έχουμε $14<2x+4y<24$ και λόγω του ερωτήματος (α) θα είναι $14<\Pi<24$. Άρα η τιμή της περιμέτρου Π του γραμμοσκιασμένου σχήματος βρίσκεται μεταξύ των αριθμών 14 και 24 (σε μονάδες μήκους).

Β36. α) Έχουμε $x\geq 2 \Leftrightarrow 2x\geq 4 \Leftrightarrow 2x-4\geq 0$ και άρα $A=|2x-4|=2x-4$.

Ακόμα $x<3 \Leftrightarrow x-3<0$ και άρα $B=|x-3|=3-x$. Τώρα έχουμε:

$$A+B=2x-4+3-x=x-1,\ x\in[2,3)$$

β) Αν υπάρχει $x\in[2,3)$, ώστε $A+B=2$, τότε θα έχουμε διαδοχικά:

$$A+B=x-1 \Leftrightarrow 2=x-1 \Leftrightarrow x=3$$

Όμως $x=3\notin[2,3)$ και άρα δεν υπάρχει $x\in[2,3)$ τέτοιο, ώστε $A+B=2$.

B37. α) Κάνοντας ομώνυμα τα κλάσματα της παράστασης Α, έχουμε:

$$A=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)+\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{15}+3+5-\sqrt{15}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{8}{5-3}=4$$

β) Λόγω και του ερωτήματος (α) έχουμε:

$$|x+A|=1\Leftrightarrow|x+4|=1\Leftrightarrow(x+4=1 \text{ ή } x+4=-1)\Leftrightarrow(x=-3 \text{ ή } x=-5)$$

B38. α) Έχουμε $\alpha<1\Leftrightarrow\alpha^2<\alpha$ $(\alpha>0)$. Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις $\alpha<1$ (1) και $\alpha^2<\alpha$ (2) κατά μέλη (αφού όλοι οι όροι είναι θετικοί), θα έχουμε $\alpha^3<\alpha$.

β) Λόγω της σχέσης του ερωτήματος (α), της σχέσης $0<\alpha<1\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}>1$, καθώς και της σχέσης $\alpha^3>0$, η διάταξη από το μικρότερο προς το μεγαλύτερο είναι:

$$0<\alpha^3<\alpha<1<\frac{1}{\alpha}$$

B39. α) Έχουμε διαδοχικά $d(x,-2)<1\Leftrightarrow-1<x+2<1\Leftrightarrow-3<x<-1$.

β) Για κάθε $x\in(-3,-1)$ έχουμε:

$$x^2+4x+3=x^2+4x+4-1=(x+2)^2-1=$$
$$=(x+2-1)(x+2+1)=(x+1)(x+3)<0$$

διότι $x<-1\Leftrightarrow x+1<0$ και $x>-3\Leftrightarrow x+3>0$.

(Το ερώτημα (β) της άσκησης αυτής λύνεται και με άλλους τρόπους –πρόσημο τριωνύμου– όπως θα δούμε και στο επόμενο κεφάλαιο, στο Β΄ τεύχος)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. **α)** Έχουμε διαδοχικά:

$$A=\left[(x^3y^5)^{-1}(x^2y^3)^5\right]:\left(\frac{x^3}{y^{-2}}\right)=\left[(x^{-3}y^{-5})(x^{10}y^{15})\right]:(x^3y^2)=$$

$$=(x^7y^{10}):(x^3y^2)=x^4y^8=(xy^2)^4$$

β) Όταν $x=32=2^5$ και $y=\frac{1}{16}=\frac{1}{2^4}=2^{-4}$, η παράσταση $A=(xy^2)^4$ γίνεται:

$$A=\left[(2^5)(2^{-4})^2\right]^4=\left[2^5\cdot 2^{-8}\right]^4=\left[2^{-3}\right]^4=2^{-12}$$

γ) Για $x\geq 0$, έχουμε $\sqrt[12]{A}=\sqrt[12]{(xy^2)^4}=\sqrt[3]{xy^2}=(xy^2)^{\frac{1}{3}}$.

Γ2. **α)** Από την ταυτότητα της διαφοράς δύο τετραγώνων, έχουμε:

$$\left[\frac{x(x+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2=\left[\frac{x(x+1)}{2}-\frac{x(x-1)}{2}\right]\cdot\left[\frac{x(x+1)}{2}+\frac{x(x-1)}{2}\right]=$$

$$=\frac{x(x+1)-x(x-1)}{2}\cdot\frac{x(x+1)+x(x-1)}{2}=\frac{2x\cdot 2x^2}{4}=x^3,x\in\mathbb{R}$$

β) Εφαρμόζουμε το προηγούμενο συμπέρασμα διαδοχικά για τις τιμές του $x=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \nu$ και έχουμε:

- Για $x=1$: $1^3=\left(\frac{1\cdot 2}{2}\right)^2-\left(\frac{1\cdot 0}{2}\right)^2$
- Για $x=2$: $2^3=\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2-\left(\frac{2\cdot 1}{2}\right)^2$
- Για $x=3$: $3^3=\left(\frac{3\cdot 4}{2}\right)^2-\left(\frac{3\cdot 2}{2}\right)^2$

....

- Για $x=\nu$: $\nu^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2-\left[\frac{\nu(\nu-1)}{2}\right]^2$

Προσθέτοντας τις παραπάνω σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+\nu^3=\left[\frac{\nu(\nu+1)}{2}\right]^2,\ \nu\in\mathbb{N}$$

Γ3. α) Έχουμε $\mu^2+\nu^2=1\Rightarrow\begin{cases}\mu^2=1-\nu^2\geq 0\Rightarrow \nu^2\leq 1\Rightarrow|\nu|\leq 1\\ \nu^2=1-\mu^2\geq 0\Rightarrow \mu^2\leq 1\Rightarrow|\mu|\leq 1\end{cases}$

β) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\left(|\mu|-|\nu|\right)^2\geq 0\Leftrightarrow|\mu|^2-2|\mu||\nu|+|\nu|^2\geq 0\Leftrightarrow \mu^2-2|\mu||\nu|+\nu^2\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(\mu^2+\nu^2)-2|\mu||\nu|\geq 0\Leftrightarrow 1-2|\mu||\nu|\geq 0\Leftrightarrow 2|\mu\nu|\leq 1\Leftrightarrow|\mu\nu|\leq\frac{1}{2}$$

γ) Έχουμε $\mu^2+\nu^2=1\Leftrightarrow(\mu^2+\nu^2)^2=1\Leftrightarrow\mu^4+2\mu^2\nu^2+\nu^4=1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\mu^4+\nu^4=1-2\mu^2\nu^2$ (1).

Από τη σχέση (1) προκύπτει ότι $\mu^4+\nu^4=1-2\mu^2\nu^2\leq 1$ (2).

Επιπλέον ισχύει:

$$|\mu\nu|\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow(\mu\nu)^2\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow\mu^2\nu^2\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2\mu^2\nu^2\leq\frac{1}{2}\Leftrightarrow -2\mu^2\nu^2\geq-\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-2\mu^2\nu^2\geq 1-\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-2\mu^2\nu^2\geq\frac{1}{2}\quad(3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (3) έχουμε:

$$\mu^4+\nu^4=1-2\mu^2\nu^2\geq\frac{1}{2}\quad(4)$$

Άρα τελικά από τις σχέσεις (2) και (4) ισχύει $\frac{1}{2}\leq\mu^4+\nu^4\leq 1$.

Γ4. α) Η παράσταση Κ ορίζεται για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει:

$$2x^2-4x+2\geq 0\Leftrightarrow 2(x^2-2x+1)\geq 0\Leftrightarrow 2(x-1)^2\geq 0$$

η οποία αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η παράσταση Λ ορίζεται για όλα τα $x\in\mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει:

$$3x^3-9x^2+9x-3\geq 0\Leftrightarrow 3(x^3-3x^2+3x-1)\geq 0\Leftrightarrow 3(x-1)^3\geq 0$$

δηλαδή $x-1\geq 0\Leftrightarrow x\geq 1$.

Άρα η παράσταση Κ ορίζεται για όλα τα $x \in \mathbb{R}$, ενώ η παράσταση Λ ορίζεται για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

β) Η παράσταση $K = \sqrt{2x^2 - 4x + 2}$ γράφεται:

$K = \sqrt{2x^2 - 4x + 2} = \sqrt{2(x^2 - 2x + 1)} = \sqrt{2(x-1)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x-1)^2} =$

$= \sqrt{2} \cdot |x - 1|, \ x \in \mathbb{R}$

Η παράσταση $\Lambda = \sqrt[3]{3x^3 - 9x^2 + 9x - 3}$ γράφεται:

$\Lambda = \sqrt[3]{3x^3 - 9x^2 + 9x - 3} = \sqrt[3]{3(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)} =$

$= \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{(x-1)^3} = \sqrt[3]{3} \cdot (x - 1), \ x \geq 1$

γ) Έχουμε διαδοχικά:

$K - |\Lambda| = 2\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{3} \Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot |x-1| - \sqrt[3]{3} \cdot |x-1| = 2\sqrt{2} - 2\sqrt[3]{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x-1|\left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}\right) = 2\left(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3}\right) \Leftrightarrow |x - 1| = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1 = 2 \text{ ή } x - 1 = -2) \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = -1)$

Γ5. α) Επειδή $0 \leq P(A) \leq 1$, θα είναι $P(A) - 1 \leq 0$ και άρα $K = 1 - P(A)$. Ακόμα:

$$M = \left|P^2(B) - 2P(B) + 3\right| = \left|\left(P^2(B) - 2P(B) + 1\right) + 2\right| =$$

$$= \left|\left(P(B) - 1\right)^2 + 2\right| = \left(P(B) - 1\right)^2 + 2$$

β) i) Τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ισοπίθανα, οπότε $P(A) = P(B)$. Άρα θα έχουμε:

$$K^2 - M = \left(1 - P(A)\right)^2 - \left(P(B) - 1\right)^2 - 2 =$$

$$= \left(1 - P(A)\right)^2 - \left(P(A) - 1\right)^2 - 2 = -2$$

δηλαδή η παράσταση $K^2 - M$ είναι ανεξάρτητη των $P(A)$ και $P(B)$.

ii) Αφού τα ενδεχόμενα Α και Β είναι επιπλέον και ασυμβίβαστα, θα έχουμε $A \cap B = \varnothing$. Ακόμα έχουμε:

$$K = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |P(A) - 1| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - P(A) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A) = \frac{1}{2}$$

$$M=\frac{9}{4}\Leftrightarrow\left(P(B)-1\right)^2+2=\frac{9}{4}\Leftrightarrow\left(P(B)-1\right)^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|P(B)-1\right|=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 1-P(B)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}$$

Από τον απλό προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων, έχουμε:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

Άρα το ενδεχόμενο $A\cup B$ είναι βέβαιο.

Γ6. **α)** Για να ορίζεται η παράσταση $A(x)$, θα πρέπει να ισχύει:

$$|x+2|+|x-2|\neq 0$$

που ικανοποιείται για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αφού είναι άθροισμα δύο θετικών όρων και οι παραστάσεις $|x+2|$, $|x-2|$ δεν μηδενίζονται συγχρόνως. Άρα η παράσταση $A(x)$ ορίζεται για όλα τα $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν $|x|<2\Leftrightarrow -2<x<2\Leftrightarrow (x-2<0$ και $x+2>0)$, τότε:

$$A(x)=\frac{|x+2|-|x-2|}{|x+2|+|x-2|}=\frac{(x+2)+(x-2)}{(x+2)-(x-2)}=\frac{2x}{4}=\frac{x}{2}$$

γ) Αν $|x|>2\Leftrightarrow (x>2$ ή $x<-2)$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $x>2>-2\Leftrightarrow (x-2>0$ και $x+2>0)$, τότε:

$$A(x)=\frac{|x+2|-|x-2|}{|x+2|+|x-2|}=\frac{(x+2)-(x-2)}{(x+2)+(x-2)}=\frac{x+2-x+2}{x+2+x-2}=\frac{4}{2x}=\frac{2}{x}$$

- Αν $x<-2<2\Leftrightarrow (x+2<0$ και $x-2<0)$, τότε:

$$A(x)=\frac{|x+2|-|x-2|}{|x+2|+|x-2|}=\frac{-(x+2)+(x-2)}{-(x+2)-(x-2)}=\frac{-x-2+x-2}{-x-2-x+2}=$$

$$=\frac{-4}{-2x}=\frac{2}{x}$$

Άρα για $|x|>2$ είναι $A(x)=\frac{2}{x}$.

δ) Αν $|x| = 2 \Leftrightarrow (x = 2 \text{ ή } x = -2)$, τότε:

- Για $x = 2 \Rightarrow A(2) = \dfrac{4-0}{4+0} = 1$
- Για $x = -2 \Rightarrow A(-2) = \dfrac{-4}{4} = -1$

Γ7. **α)** **i)** Έχουμε $\sqrt[3]{(\kappa\lambda)^2} = \sqrt[3]{\left[\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)\right]^2} = \sqrt[3]{(2-1)^2} = \sqrt[3]{1} = 1$

ii) Έχουμε:

$$\sqrt[3]{\kappa^2\lambda} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^2\left(\sqrt{2}-1\right)} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot 1} = \sqrt[3]{\sqrt{2}+1} = \sqrt[3]{\kappa}$$

iii) Με όμοιο τρόπο, όπως και στο ερώτημα (β), έχουμε:

$$\sqrt[3]{\kappa\lambda^2} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^2\left(\sqrt{2}+1\right)} = \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)\left(\sqrt{2}+1\right)} =$$

$$= \sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot 1} = \sqrt[3]{\sqrt{2}-1} = \sqrt[3]{\lambda}$$

β) Με βάση και τα προηγούμενα ερωτήματα, έχουμε:

$$A = \left(\sqrt[3]{\kappa}-\sqrt[3]{\lambda}\right)^3 = \left(\sqrt[3]{\kappa}\right)^3 - 3\left(\sqrt[3]{\kappa}\right)^2\left(\sqrt[3]{\lambda}\right) + 3\left(\sqrt[3]{\kappa}\right)\left(\sqrt[3]{\lambda}\right)^2 - \left(\sqrt[3]{\lambda}\right)^3 =$$

$$= \kappa - 3\sqrt[3]{\kappa^2\lambda} + 3\sqrt[3]{\kappa\lambda^2} - \lambda = \kappa - \lambda - 3\left(\sqrt[3]{\kappa^2\lambda} - \sqrt[3]{\kappa\lambda^2}\right) =$$

$$= \sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1-3\left(\sqrt[3]{\kappa}-\sqrt[3]{\lambda}\right) = 2-3\left(\sqrt[3]{\kappa}-\sqrt[3]{\lambda}\right)$$

Γ8. **α)** Έχουμε:

$$x - y = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} - \frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = \frac{(1-\sqrt{2})^2-(1+\sqrt{2})^2}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1-2\sqrt{2}+2-1-2\sqrt{2}-2}{-1} = 4\sqrt{2}$$

Επομένως είναι $A = (x-y)^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 16\cdot 2 = 32.$

β) Έχουμε:

$$B=(x+y)^3=\left(\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}+\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\right)^3=\left[\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^2+\left(1+\sqrt{2}\right)^2}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)}\right]^3=$$

$$=\left[\frac{3-2\sqrt{2}+3+2\sqrt{2}}{-1}\right]^3=(-6)^3=-216$$

γ) Από τη γνωστή ταυτότητα:

$$(x+y)^3=x^3+3x^2y+3xy^2+y^3=(x^3+y^3)+3xy(x+y)$$

έχουμε $B=\Gamma+3\cdot(-6)\Leftrightarrow \Gamma=B+18\Leftrightarrow \Gamma=-216+18=-198$,

αφού $xy=1$ και $x+y=-6$.

Γ9. **α)** Έχουμε:

$$\frac{1}{2}\le x\le 1\Rightarrow \frac{1}{4}\le x^2\le 1\Rightarrow \frac{1}{2}\le 2x^2\le 2 \text{ (1) και}$$

$$\left(-2<y<0 \text{ ή } 0<y<\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\left(-6<3y<0 \text{ ή } 0<3y<1\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(-5<3y+1<1 \text{ (2) ή } 1<3y+1<2 \text{ (3)}\right)$$

Άρα έχουμε τις επόμενες περιπτώσεις:

- Αν $\frac{1}{2}\le x\le 1$ και $-2<y<0$, τότε:

$$\frac{1}{2}-5<2x^2+3y+1<3\Rightarrow -\frac{9}{2}<A<3$$

- Αν $\frac{1}{2}\le x\le 1$ και $0<y<\frac{1}{3}$, τότε:

$$\frac{1}{2}+1<2x^2+3y+1<4\Rightarrow \frac{3}{2}<A<4$$

Επομένως $A\in\left(-\frac{9}{2},3\right)\cup\left(\frac{3}{2},4\right)$.

β) Η παράσταση γράφεται:

$$B=\frac{y-1+\sqrt{(3y-1)^2}}{2y}=\frac{y-1+|3y-1|}{2y},\ y\neq 0$$

- Αν $0 < y < \frac{1}{3} \Rightarrow 0 < 3y < 1 \Rightarrow -1 < 3y - 1 < 0$, τότε:

  $|3y-1| = 1-3y$, οπότε $B = \frac{y-1+1-3y}{2y} = \frac{-2y}{2y} = -1$

- Αν $-2 < y < 0 \Rightarrow -6 < 3y < 0 \Rightarrow -7 < 3y-1 < -1 < 0$, τότε:

  $|3y-1| = 1-3y$, οπότε $B = \frac{y-1+1-3y}{2y} = \frac{-2y}{2y} = -1$

Άρα σε κάθε περίπτωση $B = -1$, δηλαδή η παράσταση B είναι ανεξάρτητη του y.

γ) Υψώνουμε τη σχέση $\Gamma = \sqrt{x+\sqrt{2x-1}} + \sqrt{x-\sqrt{2x-1}}$ στο τετράγωνο και έχουμε διαδοχικά:

$$\Gamma^2 = \left(\sqrt{x+\sqrt{2x-1}}\right)^2 + 2\sqrt{x+\sqrt{2x-1}} \cdot \sqrt{x-\sqrt{2x-1}} +$$

$$+\left(\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}\right)^2 =$$

$$= x + \sqrt{2x-1} + 2\sqrt{x^2 - \left(\sqrt{2x-1}\right)^2} + x - \sqrt{2x-1} =$$

$$= 2x + 2\sqrt{x^2-2x+1} = 2x + 2\sqrt{(x-1)^2} =$$

$$= 2x + 2|x-1| = 2x + 2(1-x) = 2x + 2 - 2x = 2$$

(αφού $x \le 1 \Leftrightarrow x - 1 \le 0$)

Άρα $\Gamma^2 = 2 \Leftrightarrow \Gamma = \sqrt{2}$, αφού $\Gamma > 0$ (η τιμή $\Gamma = -\sqrt{2}$ απορρίπτεται). Δηλαδή η παράσταση Γ είναι ανεξάρτητη του x.

Γ10. α) Σύμφωνα με τις ιδιότητες των ανισοτήτων έχουμε διαδοχικά:

$$x < y+z \Leftrightarrow x+y+z < 2(y+z) \Leftrightarrow \frac{x+y+z}{2} < y+z \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{y+z} < \frac{2}{x+y+z} \Leftrightarrow \frac{x+z}{y+z} < \frac{2(x+z)}{x+y+z}$$

β) Από την τριγωνική ανισότητα των πλευρών ενός τριγώνου $\alpha, \beta, \gamma > 0$, αλλά και με βάση το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε:

$$\alpha<\beta+\gamma \Leftrightarrow \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}<\frac{2(\alpha+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma} \quad (1)$$

$$\beta<\gamma+\alpha \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{\gamma+\alpha}<\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta+\gamma} \quad (2)$$

$$\gamma<\alpha+\beta \Leftrightarrow \frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta}<\frac{2(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma} \quad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1), (2) και (3), έχουμε:

$$\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\gamma}+\frac{\beta+\gamma}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}<\frac{2(\alpha+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{2(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta+\gamma}+\frac{2(\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{4(\alpha+\beta+\gamma)}{\alpha+\beta+\gamma}=4$$

Γ11. α) Προσθέτοντας το x^2 και στα δύο μέλη της ισότητας $xy+yz+zx=1$, έχουμε:

$$x^2+1=x^2+xy+yz+zx=x(x+y)+z(x+y)=(x+y)(x+z) \quad (1)$$

β) Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία του ερωτήματος (α), προσθέτοντας διαδοχικά στα μέλη της ισότητας τους όρους y^2 και z^2, θα έχουμε:

$$y^2+1=y^2+xy+yz+zx=y(y+x)+z(y+x)=(x+y)(y+z) \quad (2)$$

$$z^2+1=z^2+xy+yz+zx=z(z+y)+x(y+z)=(y+z)(z+x) \quad (3)$$

Η παράσταση Κ από τις σχέσεις (1), (2) και (3) γίνεται:

$$K=x\sqrt{\frac{(y^2+1)(z^2+1)}{x^2+1}}+y\sqrt{\frac{(x^2+1)(z^2+1)}{y^2+1}}+z\sqrt{\frac{(x^2+1)(y^2+1)}{z^2+1}}=$$

$$=x\sqrt{\frac{(x+y)(y+z)(y+z)(z+x)}{(x+y)(x+z)}}+y\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)(y+z)(z+x)}{(x+y)(y+z)}}+$$

$$+z\sqrt{\frac{(x+y)(x+z)(x+y)(y+z)}{(y+z)(z+x)}}=$$

$$=x\sqrt{(y+z)^2}+y\sqrt{(x+z)^2}+z\sqrt{(x+y)^2}=x|y+z|+y|x+z|+z|x+y|=$$

$$=x(y+z)+y(x+z)+z(x+y)=$$

$$=xy+xz+yx+yz+zx+zy=2(xy+yz+xz)=2\cdot1=2$$

Γ12. Αφού $\kappa=P(A)+\frac{1}{2}$, $\lambda=P(B)+\frac{1}{2}$ και $\mu=P(A\cup B)-\frac{1}{2}$, θα έχουμε:

$$\left|\kappa+\lambda-\frac{3}{4}\right|=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\left(\kappa+\lambda-\frac{3}{4}=\frac{1}{3}\text{ ή }\kappa+\lambda-\frac{3}{4}=-\frac{1}{3}\right)$$

Άρα:

- $\kappa+\lambda=\frac{13}{12}\Leftrightarrow P(A)+P(B)+1=\frac{13}{12}\Leftrightarrow P(A)+P(B)=\frac{1}{12}$ ή
- $\kappa+\lambda=\frac{5}{12}\Leftrightarrow P(A)+P(B)+1=\frac{5}{12}\Leftrightarrow P(A)+P(B)=-\frac{7}{12}$ (απορ.)

α) Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$\kappa^2+\lambda^2-\mu=[P(A)]^2+[P(B)]^2+\frac{14}{13}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(P(A)+\frac{1}{2}\right)^2+\left(P(B)+\frac{1}{2}\right)^2-P(A\cup B)+\frac{1}{2}=$$

$$=[P(A)]^2+[P(B)]^2+\frac{14}{13}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[P(A)]^2+P(A)+\frac{1}{4}+[P(B)]^2+P(B)+\frac{1}{4}-P(A\cup B)+\frac{1}{2}=$$

$$=[P(A)]^2+[P(B)]^2+\frac{14}{13}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cup B)+1=\frac{14}{13}\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{13}$$

β) Είναι $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{12}-\frac{1}{13}=\frac{1}{156}$ και

αφού $A'\cap B'=(A\cup B)'$, θα έχουμε:

$$P(A'\cap B')=P\big((A\cup B)'\big)=1-P(A\cup B)=1-\frac{1}{156}=\frac{155}{156}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) Αφού $(\alpha-1)(1-\beta)>0$, οι αριθμοί $\alpha-1$ και $1-\beta$ θα είναι ομόσημοι. Συνεπώς διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1η περίπτωση: Είναι $\alpha-1>0$ και $1-\beta>0$, δηλαδή $\alpha>1$ και $\beta<1$. Άρα τελικά έχουμε $\beta<1<\alpha$.

2η περίπτωση: Είναι $\alpha-1<0$ και $1-\beta<0$, δηλαδή $\alpha<1$ και $\beta>1$. Άρα τελικά έχουμε $\alpha<1<\beta$.

Έτσι σε κάθε περίπτωση, το 1 είναι μεταξύ των α και β.

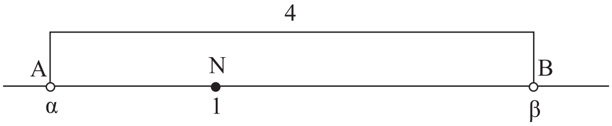
β)

- Αν $\alpha>1\Leftrightarrow\alpha-1>0$ και $\beta<1\Leftrightarrow 1-\beta>0$, τότε $|\alpha-1|=\alpha-1$ και $|1-\beta|=1-\beta$, οπότε:
$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|=\alpha-1+1-\beta=\alpha-\beta=4$$
διότι $|\beta-\alpha|=\alpha-\beta$, αφού $\alpha>\beta\Leftrightarrow\beta-\alpha<0$.
- Αν $\alpha<1\Leftrightarrow\alpha-1<0$ και $\beta>1\Leftrightarrow 1-\beta<0$, τότε $|\alpha-1|=1-\alpha$ και $|1-\beta|=\beta-1$, οπότε:
$$K=|\alpha-1|+|1-\beta|=1-\alpha+\beta-1=\beta-\alpha=4$$
διότι $|\beta-\alpha|=\beta-\alpha$, αφού $\alpha<\beta\Leftrightarrow\beta-\alpha>0$.

Άρα σε κάθε περίπτωση είναι $K=4$.

Μια γεωμετρική ερμηνεία είναι:

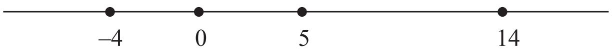
$K=|\alpha-1|+|1-\beta|=d(\alpha,1)+d(\beta,1)=d(\alpha,\beta)$ και άρα $K=4$ (άθροισμα διαδοχικών ευθύγραμμων τμημάτων). Μια ενδεικτική απεικόνιση της παραπάνω γεωμετρικής ερμηνείας στην περίπτωση, για παράδειγμα, που $\alpha<1<\beta$ είναι η επόμενη:



Δ2. α) Λεκτική ερμηνεία της σχέσης $d(x,5)\le 9$:

Στον άξονα των πραγματικών αριθμών η απόσταση όλων των πραγματικών αριθμών από το 5 είναι μικρότερη ή ίση του 9.

β)



Έτσι καταλαβαίνουμε ότι είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που βρίσκονται στο κλειστό διάστημα $[-4,14]$.

γ) Έχουμε:

$$|x-5|\le 9 \Leftrightarrow d(x,5)\le 9 \Leftrightarrow -9\le x-5\le 9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -4\le x\le 14 \Leftrightarrow x\in[-4,14]$$

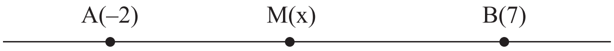
δ) Έχουμε $|x+4|+|x-14|=x+4-x+14=18$, αφού:

$$x+4\ge 0 \text{ και } x-14\le 0$$

Δ3. α) i) Έχουμε $|x+2|=|x-(-2)|=d(x,-2)=(AM)$, δηλαδή η απόσταση των σημείων A και M στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

ii) Έχουμε $|x-7|=d(x,7)=(MB)$, δηλαδή η απόσταση των σημείων B και M στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β)



$|x+2|+|x-7|=d(x,-2)+d(x,7)=(AM)+(MB)$, δηλαδή το άθροισμα των αποστάσεων του M από τα σημεία A και B του άξονα των πραγματικών αριθμών.

γ) $A=|x+2|+|x-7|=d(x,-2)+d(x,7)=(AM)+(MB)=(AB)=9$
(αφού το M είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος AB)

δ) Έχουμε $x>-2 \Leftrightarrow x+2>0$ και $x<7 \Leftrightarrow x-7<0$, άρα:

$$|x+2|=x+2 \text{ και } |x-7|=7-x$$

Επομένως $A=|x+2|+|x-7|=x+2+7-x=9$.

Δ4. α) Η σχέση $|x-5|=d(x,5)=(AM)$ εκφράζει την απόσταση των σημείων A και M πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Η σχέση $|x-9| = d(x,9) = (BM)$ εκφράζει την απόσταση των σημείων Β και Μ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

β) **i)** Αν $|x-5| = |x-9| \Leftrightarrow (AM) = (BM)$, τότε το σημείο Μ του άξονα ισαπέχει από τα Α και Β, δηλαδή το Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

ii) Γεωμετρικά:

Το x θα πρέπει να είναι ανάμεσα στο 5 και στο 9.
Το x θα πάρει την τιμή 7, αφού τότε 7 – 5 = 9 – 7.
Αλγεβρικά:

$$|x-5| = |x-9| \Leftrightarrow \left(x-5 = x-9 \text{ (αδύνατη) ή } x-5 = 9-x\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7$$

Δ5. **α)** Έχουμε $|x-4| < 2 \Leftrightarrow d(x,4) < 2 \Leftrightarrow -2 < x-4 < 2 \Leftrightarrow 2 < x < 6$.

β) **i)** Αφού η απόσταση του πραγματικού αριθμού x από το 4 στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι μικρότερη από 2, θα είναι $|x-4| < 2$ ή $2 < x < 6$.

Θα αποδείξουμε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού αυτού από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14, δηλαδή ότι $2 < d(3x,4) < 14 \Leftrightarrow 2 < |3x-4| < 14$.

Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$2 < x < 6 \Leftrightarrow 6 < 3x < 18 \Leftrightarrow 2 < 3x-4 < 14 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2 < |3x-4| < 14 \Leftrightarrow 2 < d(3x,4) < 14$$

(Προφανώς $|3x-4| = 3x-4$, διότι $3x-4 > 0$.)

ii) Αναζητάμε μεταξύ ποιων ορίων περιέχεται η τιμή της παράστασης $|3x-19| = d(3x,19)$.

Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$2<x<6 \Leftrightarrow 6<3x<18 \Leftrightarrow -13<3x-19<-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1<19-3x<13 \Leftrightarrow 1<|3x-19|<13 \Leftrightarrow 1<d(3x,19)<13$

αφού $|3x-19|=19-3x$, διότι $3x-19<0$. Άρα η τιμή της απόστασης των αριθμών $3x$ και 19 είναι μεταξύ των τιμών 1 και 13.

Δ6. **α)** $|\alpha-2|<1 \Leftrightarrow d(\alpha,2)<1 \Leftrightarrow -1<\alpha-2<1 \Leftrightarrow 1<\alpha<3$.

β) $|\beta-3|\le 2 \Leftrightarrow d(\beta,3)\le 2 \Leftrightarrow -2\le\beta-3\le 2 \Leftrightarrow 1\le\beta\le 5$.

γ) Έχουμε $\left\{\begin{matrix} 1<\alpha<3 \\ 1\le\beta\le 5 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2<2\alpha<6 \ (1) \\ -15\le -3\beta\le -3 \ (2) \end{matrix}\right\}$ και προσθέτοντας τις σχέσεις (1) και (2) κατά μέλη, έχουμε $-13<2\alpha-3\beta<3$. Άρα η παράσταση $2\alpha-3\beta$ είναι μεταξύ των αριθμών -13 και 3.

δ) Έχουμε $1<\alpha<3$ (3) και $1\le\beta\le 5 \Leftrightarrow \frac{1}{5}\le\frac{1}{\beta}\le 1$ (4). Πολλαπλασιάζοντας τις σχέσεις (3) και (4) κατά μέλη (εφόσον όλοι οι όροι είναι θετικοί αριθμοί), θα έχουμε $\frac{1}{5}<\frac{\alpha}{\beta}<3$.

Άρα η παράσταση $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι μεταξύ των αριθμών $\frac{1}{5}$ και 3.

Δ7. **α)** Από την πρόταση Π1: «Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^oC) σε βαθμούς Φαρενάιτ (^oF), πολλαπλασιάζουμε τους βαθμούς Κελσίου με 1,8 και προσθέτουμε 32.», προκύπτει συμβολικά $F=1,8C+32$.

Από την πρόταση Π2: «Για να μετατρέψουμε τη θερμοκρασία από βαθμούς Κελσίου (^oC) σε βαθμούς Κέλβιν (^oK), προσθέτουμε στους βαθμούς Κελσίου (^oC) το 273.», προκύπτει συμβολικά:

$$K=C+273$$

β) Έχουμε $F=1,8C+32 \Leftrightarrow 1,8C=F-32 \Leftrightarrow C=\dfrac{F-32}{1,8}$ (1) και:

$$K=C+273 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} K=\frac{F-32}{1,8}+273$$

γ) Από τα δεδομένα προκύπτει ότι $278 \le K \le 283$ και έτσι έχουμε διαδοχικά:

$$278 \le K \le 283 \Leftrightarrow 278 \le \frac{F-32}{1,8} + 273 \le 283 \Leftrightarrow 5 \le \frac{F-32}{1,8} \le 10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9 \le F - 32 \le 18 \Leftrightarrow 41 \le F \le 50$$

Απαντήσεις και λύσεις
Διαγωνισμάτων

Διαγώνισμα 1

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σωστό. **β)** Λάθος. **γ)** Λάθος.

δ) Σωστό. **ε)** Σωστό.

Α2. Απόδειξη της πρότασης 4.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο Θέμα Β21.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο Θέμα Γ4.

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο Θέμα Δ4.

Διαγώνισμα 2

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Λάθος. **β)** Λάθος. **γ)** Σωστό.

δ)

1	2	3
δ	γ	β

ε)

1	2	3
β	δ	γ

Α2. Απόδειξη της πρότασης 5.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο Θέμα Β38.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο Θέμα Γ5.

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο Θέμα Δ3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο

Εξισώσεις

- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ ΤΟΥ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
- ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΤΩΝ ΕΡΩΤΗΣΕΩΝ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΙΚΟΥ ΤΥΠΟΥ
- ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΤΗΣ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΩΝ

Απαντήσεις
στις ερωτήσεις του σχολικού βιβλίου

I.

Αριθμός Ερώτησης	Απάντηση	Σχόλιο
1	Ψ	Για $\alpha = 1$ η εξίσωση γίνεται ταυτότητα.
2	Α	
3	Ψ	Έχει 4 πραγματικές ρίζες, τις $1, -1, 2, -2$.
4	Α	
5	Ψ	
6	Α	
7	Α	Αφού αν $\alpha\gamma < 0$, τότε $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$.
8	Ψ	π.χ. οι εξισώσεις $x^2 - 3x + 2 = 0$ και $2x^2 - 6x + 4 = 0$ έχουν τις ίδιες ρίζες.
9	Ψ	Αν $\alpha = 0$, θα είναι εξίσωση 1ου βαθμού. Αν όμως $\alpha \neq 0$, θα ήταν αληθής, αφού $\Delta = 4(\alpha^2 + 1) > 0$.
10	Ψ	Αφού $\Delta = 0$ έχει μία διπλή ρίζα.
11	Α	$\Delta = -4\alpha^2 < 0$ $(\alpha \neq 0)$
12	Ψ	$\Delta = \alpha^2 \geq 0$
13	Ψ	$\Delta = \left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \geq 0$ και $P = 1$ (όμως για $\alpha = -1$ έχει 1 διπλή ρίζα, τη $x = -1$).
14	Ψ	Πρέπει $x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.
15	Ψ	Πρέπει $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 1$ και $x \neq -1.)$
16	Α	Είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 + 10x + 16 = 0$, δηλαδή οι αριθμοί -2 και -8.
17	Α	Είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 10x + 25 = 0$, δηλαδή $x = y = 5$.
18	Ψ	Αφού θα έπρεπε να είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + 2 = 0$, η οποία είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

ΙΙ. **1.** Η ισοδυναμία $(2x-1)(x+2)=(3-2x)(x+2) \Leftrightarrow 2x-1=3-2x$ δεν ισχύει πάντα, παρά μόνο όταν $x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. Κατά συνέπεια οδηγηθήκαμε σε λάθος συμπέρασμα.

Η σωστή πορεία της λύσης της εξίσωσης είναι:

$$(2x-1)(x+2)=(3-2x)(x+2) \Leftrightarrow (2x-1)(x+2)-(3-2x)(x+2)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)\left[(2x-1)-(3-2x)\right]=0 \Leftrightarrow (x+2)(4x-4)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x=-2 \text{ ή } x=1)$$

2. Θα έπρεπε αρχικά να τεθεί ο περιορισμός $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Αν ο περιορισμός αυτός δεν ικανοποιείται, τότε δεν έχει νόημα η εξίσωση και, κατά συνέπεια, οι αριθμοί που προκύπτουν δεν είναι πάντα οι λύσεις της εξίσωσης. Πράγματι, οι αριθμοί $x=1$ και $x=-1$ δεν αποτελούν λύσεις της δοθείσας εξίσωσης (δεν την επαληθεύουν). Κανένας από αυτούς δεν ικανοποιεί τον περιορισμό $x \geq 2$.

Απαντήσεις
στις ερωτήσεις αντικειμενικού τύπου

Α.1.1. Ερωτήσεις Σωστού-Λάθους

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
Σ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Λ	Σ	Λ	Λ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Σ	Λ	Σ

Α.1.2. Ερωτήσεις Πολλαπλής Επιλογής

1	2	3	4	5	6	7	8
Α	Β	Β	Γ	Β	Α	Δ	Α

Α.1.3. Ερωτήσεις Αντιστοίχισης

1.

1	2	3
γ	α	β

2.

1	2	3
α	γ	δ

3.

1	2	3
δ	β	α

4.

1	2
β	γ

5.

1	2	3
β	δ	γ

Λύσεις ασκήσεων
της Τράπεζας Θεμάτων

ΘΕΜΑ Β

Β1. **α)** Για να είναι το 1 λύση της δοθείσας εξίσωσης $x^2-(\lambda-1)x+6=0$, θα πρέπει:

$$1-(\lambda-1)+6=0 \Leftrightarrow \lambda=8$$

β) Για $\lambda=2$, η δοθείσα εξίσωση γίνεται $x^2-x+6=0$ με $\Delta=-23<0$ και άρα η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες (αδύνατη στο $\mathbb{R}$).

Β2. **α)** Για να έχει η εξίσωση $\lambda x^2-(\lambda-1)x-1=0,\ \lambda\neq 0\,(1)$ ρίζα τον αριθμό -2, θα πρέπει:

$$\lambda(-2)^2-(\lambda-1)(-2)-1=0 \Leftrightarrow 4\lambda+2\lambda-2-1=0 \Leftrightarrow 6\lambda=3 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

Άρα για να έχει η εξίσωση (1) ρίζα τον αριθμό -2, θα πρέπει $\lambda=\frac{1}{2}$.

β) Η διακρίνουσα της δοθείσας εξίσωσης είναι:

$$\Delta=(\lambda-1)^2+4\lambda=\lambda^2-2\lambda+1+4\lambda=\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2\geq 0,\ \lambda\neq 0$$

Άρα η δοθείσα εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda\neq 0$.

Β3. **α)** Το τριώνυμο $2x^2+5x-1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=25+8=33>0$ και άρα έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες x_1 και x_2.

β) Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta, έχουμε:

$$S=x_1+x_2=-\frac{5}{2}$$

$$P=x_1\cdot x_2=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{S}{P}=5$$

γ) Αν S΄ και P΄ αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$, τότε θα έχουμε:

$S' = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5$

$P' = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 \cdot x_2} = -2$

και άρα η ζητούμενη εξίσωση, που έχει ρίζες τις $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$ είναι η:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 2 = 0$$

B4. α) Έχουμε $|2x-1| = 3 \Leftrightarrow (2x-1=3 \text{ ή } 2x-1=-3) \Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=-1)$.

β) Αφού α, β οι ρίζες της εξίσωσης του προηγούμενου ερωτήματος, με $\alpha < \beta$, θα είναι $\alpha = -1$ και $\beta = 2$. Έτσι έχουμε:

$$\alpha x^2 + \beta x + 3 = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης αυτής είναι $\Delta = 16$ και οι ρίζες της είναι $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2}$, δηλαδή $x_1 = -1$ και $x_2 = 3$.

B5. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$, είναι:

$\Delta = 4\lambda^2 - 4 \cdot 4(\lambda-1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 4(\lambda-2)^2$

β) Επειδή $\Delta \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\lambda = 2$), η δοθείσα εξίσωση θα έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ (άνισες ή μία διπλή ρίζα).

γ) Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$S = -\frac{-2\lambda}{1} = 2\lambda \ (1) \text{ και } P = \frac{4(\lambda-1)}{1} = 4(\lambda-1) \ (2)$$

Έτσι από τις (1) και (2) έχουμε διαδοχικά:

$$x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2 \Leftrightarrow S = P \Leftrightarrow 2\lambda = 4(\lambda-1) \Leftrightarrow \lambda = 2$$

B6. **α)** Έχουμε ισοδύναμα:

$\lambda x = x + \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow \lambda x - x = \lambda^2 - 1 \Leftrightarrow (\lambda - 1)x = (\lambda - 1)(\lambda + 1),\ \lambda \in \mathbb{R}$

β) Για $\lambda \neq 1$, η εξίσωση (1) θα έχει μοναδική λύση, τη:

$$x = \frac{(\lambda-1)(\lambda+1)}{\lambda-1} = \lambda + 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

γ) Για $\lambda = 1$, η εξίσωση (1) γίνεται $0 \cdot x = 0$, δηλαδή ταυτότητα στο $\mathbb{R}$.

B7. **α)** Έχουμε διαδοχικά:

$|x-2| = \sqrt{3} \Leftrightarrow \left(x - 2 = \sqrt{3} \text{ ή } x - 2 = -\sqrt{3}\right) \Leftrightarrow \left(x = 2 + \sqrt{3} \text{ ή } x = 2 - \sqrt{3}\right)$

β) Έστω $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ και $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ οι ρίζες της ζητούμενης εξίσωσης $2^{ου}$ βαθμού.

Τότε έχουμε:

$S = x_1 + x_2 = \left(2+\sqrt{3}\right) + \left(2-\sqrt{3}\right) = 4$ και

$P = x_1 \cdot x_2 = \left(2+\sqrt{3}\right) \cdot \left(2-\sqrt{3}\right) = 4 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 4 - 3 = 1$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού με ρίζες τις x_1, x_2 είναι:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

B8. **α)** Η εξίσωση $(\lambda^2 - 9)x = \lambda^2 - 3\lambda$, για παράδειγμα, για τις τιμές:

- $\lambda = 1 \Rightarrow -8x = -2 \left(\text{με λύση } x = \dfrac{1}{4}\right)$
- $\lambda = 0 \Rightarrow -9x = 0$ (με λύση $x = 0$)
- $\lambda = -1 \Rightarrow -8x = 4 \left(\text{με λύση } x = -\dfrac{1}{2}\right)$

β) Για να έχει η δοθείσα εξίσωση μία μοναδική λύση, θα πρέπει να ισχύει:

$$\lambda^2 - 9 \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-3)(\lambda+3) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 3 \neq 0 \text{ και } \lambda + 3 \neq 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\lambda \neq 3 \text{ και } \lambda \neq -3)$$

Η λύση της εξίσωσής μας τότε είναι:

$$x = \frac{\lambda^2 - 3\lambda}{\lambda^2 - 9} = \frac{\lambda(\lambda-3)}{(\lambda-3)(\lambda+3)} = \frac{\lambda}{\lambda+3}$$

γ) Με βάση το ερώτημα (β) έχουμε:

$$\frac{\lambda}{\lambda+3}=4 \Leftrightarrow 4(\lambda+3)=\lambda \Leftrightarrow 3\lambda=-12 \Leftrightarrow \lambda=-4$$

Αλλιώς: Για να είναι το 4 λύση της δοθείσας εξίσωσης, θα πρέπει να την επαληθεύει. Δηλαδή πρέπει:

$$(\lambda^2-9)\cdot 4=\lambda^2-3\lambda \Leftrightarrow 4\lambda^2-36=\lambda^2-3\lambda \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3\lambda^2+3\lambda-36=0 \Leftrightarrow 3(\lambda^2+\lambda-12)=0$$

η οποία έχει λύσεις τις $\lambda=3$ (απορρίπτεται) ή $\lambda=-4$.

Β9. α) Έχουμε $\Delta=4-4(\lambda-2)=4-4\lambda+8=-4\lambda+12$. Για να έχει η δοθείσα εξίσωση πραγματικές ρίζες, θα πρέπει:

$$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow -4\lambda+12\geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda\leq 12 \Leftrightarrow \lambda\leq 3$$

β) Από τους τύπους του Vieta, έχουμε $\begin{cases} S=x_1+x_2=-\dfrac{2}{1}=-2 \\ P=x_1\cdot x_2=\dfrac{\lambda-2}{1}=\lambda-2 \end{cases}$.

Τώρα από τη σχέση $x_1\cdot x_2-2(x_1+x_2)=1$, έχουμε ισοδύναμα:

$$x_1\cdot x_2-2(x_1+x_2)=1 \Leftrightarrow P-2S=1 \Leftrightarrow \lambda-2-2\cdot(-2)=1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda-2+4=1 \Leftrightarrow \lambda=-1$$

που είναι δεκτή τιμή αφού $\lambda=-1<3$.

Β10. α) i) Για $\alpha=1$, η εξίσωση $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$ γίνεται $4x=-8$ με μοναδική λύση τη $x=-2$.

ii) Για $\alpha=-3$, η εξίσωση $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$ γίνεται $0\cdot x=0$, που αποτελεί ταυτότητα στο $\mathbb{R}$.

β) Για να έχει η εξίσωση $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$ μοναδική λύση, θα πρέπει να ισχύει:

$$\alpha+3\neq 0 \Leftrightarrow \alpha\neq -3$$

Τότε η λύση είναι:

$$x=\frac{\alpha^2-9}{\alpha+3}=\frac{(\alpha+3)(\alpha-3)}{\alpha+3}=\alpha-3$$

Β11. α) Για να έχει νόημα πραγματικού αριθμού η παράσταση:

$$\Pi = \frac{2x^2-1}{x^2-x} + \frac{1}{1-x} = \frac{2x^2-1}{x^2-x} - \frac{1}{x-1}$$

θα πρέπει να ισχύει:

$x^2 - x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-1) \neq 0 \Leftrightarrow (x \neq 0 \text{ και } x \neq 1) \text{ και } (x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1)$

Άρα η παράσταση Π έχει νόημα πραγματικού αριθμού για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$.

β) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0,1\}$, θα έχουμε (με απαλοιφή των παρονομαστών):

$$\frac{2x^2-1}{x^2-x} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^2-1}{x(x-1)} - \frac{1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 1 - x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - x - 1 = 0$$

Η εξίσωση αυτή έχει $\Delta = 9$ και λύσεις τις $x_1 = 1$ (απορρίπτεται) και $x_2 = -\frac{1}{2}$, που είναι δεκτή.

Β12. α) Η περίμετρος και το εμβαδόν του ορθογωνίου με διαστάσεις $x, y > 0$ είναι:

$$\Pi = 2x + 2y \text{ και } E = x \cdot y$$

Άρα έχουμε:

$$\Pi = 20 \Leftrightarrow 2x + 2y = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \text{ και } E = 24 \Leftrightarrow x \cdot y = 24$$

Αν S και P, αντίστοιχα, το άθροισμα και το γινόμενο των x και y που αποτελούν ρίζες της ζητούμενης εξίσωσης, έχουμε $S = 10$ και $P = 24$ και έτσι η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$\kappa^2 - S\kappa + P = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 10\kappa + 24 = 0$$

β) Τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου είναι οι ρίζες της εξίσωσης $\kappa^2 - 10\kappa + 24 = 0$, που είναι $x = 4$ και $y = 6$ ή $x = 6$ και $y = 4$.

Β13. α) Έχουμε $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 - (\alpha^2+\beta^2) = 2\alpha\beta$ και από τα δεδομένα είναι $2\alpha\beta = 12^2 - 272 \Leftrightarrow 2\alpha\beta = -128 \Leftrightarrow \alpha\beta = -64$.

β) Αν S και P αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των α, β, τότε θα είναι $S = 12$ και $P = -64$. Έτσι η ζητούμενη εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, που έχει ρίζες τα α και β, είναι:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x - 64 = 0$$

γ) Τα α, β αποτελούν τις ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 12x - 64 = 0$. Είναι $\Delta = 400$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_1 = 16 = \alpha$ και $x_2 = -4 = \beta$ (ή $\alpha = -4$ και $\beta = 16$).

Β14. α) Έχουμε:

- $$A + B = \frac{1}{3-\sqrt{7}} + \frac{1}{3+\sqrt{7}} = \frac{\left(3+\sqrt{7}\right)+\left(3-\sqrt{7}\right)}{\left(3-\sqrt{7}\right)\left(3+\sqrt{7}\right)} = \frac{6}{9-7} = \frac{6}{2} = 3$$
- $$A \cdot B = \frac{1}{3-\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{3+\sqrt{7}} = \frac{1}{9-7} = \frac{1}{2}$$

β) Αν S και P αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των Α και Β, θα έχουμε $S = A + B = 3$ και $P = A \cdot B = \frac{1}{2}$. Έτσι η ζητούμενη εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, που έχει ρίζες τα Α και Β, είναι η εξής:

$$x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 0$$

Β15. α) Από τη δοσμένη σχέση έχουμε $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = 20 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta) = 20$. Αφού $\alpha\beta = 4$, η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$4(\alpha+\beta) = 20 \Leftrightarrow \alpha + \beta = 5$$

β) Αν S και P αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των α, β, θα έχουμε $S = 5$ και $P = 4$. Έτσι η ζητούμενη εξίσωση, που έχει ρίζες τα α και β, είναι η $x^2 - Sx + P = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$. Τα α και β θα προκύψουν ως ρίζες της εξίσωσης αυτής. Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta = 9$ και ρίζες $x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$, δηλαδή $x_1 = 4 = \alpha$ και $x_2 = 1 = \beta$ (ή $\alpha = 1$ και $\beta = 4$).

Β16. α) Έχουμε διαδοχικά από τη δοσμένη σχέση:

$$\alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3=-12 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)=-12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)^2=-12$$

Επειδή $\alpha+\beta=-1$, θα είναι $\alpha\beta\cdot(-1)^2=-12 \Leftrightarrow \alpha\beta=-12$.

β) Αν S και P αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των α και β, θα έχουμε $S=-1$ και $P=-12$. Έτσι η ζητούμενη εξίσωση, που έχει ρίζες τα α και β, είναι η $x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2+x-12=0$. Τα α και β θα προκύψουν ως ρίζες της εξίσωσης αυτής.

Η εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=49$ και ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm 7}{2}$, δηλαδή $x_1=3=\alpha$ και $x_2=-4=\beta$ (ή $\alpha=-4$ και $\beta=3$).

Β17. α) Η εξίσωση $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}$ (1) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=\left(\sqrt{3}-1\right)^2+4\sqrt{3}=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}+1+4\sqrt{3}=$$
$$=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}+1=\left(\sqrt{3}+1\right)^2$$

β)[4] Αφού $\Delta=\left(\sqrt{3}+1\right)^2>0$, το τριώνυμο (1) θα έχει δύο άνισες ρίζες:

- $x_1=\dfrac{-\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)}{-2}=\dfrac{2}{-2}=-1$
- $x_2=\dfrac{-\left(\sqrt{3}-1\right)-\left(\sqrt{3}+1\right)}{-2}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}=\sqrt{3}$

Άρα έχουμε $-x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x+\sqrt{3}=-\left(x-\sqrt{3}\right)(x+1)$.

Β18. α) Έχουμε $-2x^2+10x=12 \Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0$. Η εξίσωση έχει $\Delta=4$ και λύσεις τις $x_1=3$ και $x_2=2$.

β) Για την εξίσωση $\dfrac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$, θα πρέπει αρχικά να ισχύει ο περιορισμός $x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$. Τώρα έχουμε:

4. Η άσκηση αυτή θα ξαναλυθεί στο κεφάλαιο 4^{ο}, αφού χρησιμοποιήσαμε την παραγοντοποίηση τριωνύμου, δηλαδή αν x_1, x_2 οι ρίζες του $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, τότε: $x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$.

$$\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0 \Leftrightarrow -2x^2+10x-12=0$$

Οι ρίζες της τελευταίας εξίσωσης προκύπτουν από το ερώτημα (α) και είναι $x_1=3$ και $x_2=2$ (απορρίπτεται).

B19. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2-\kappa x-2=0$ είναι $\Delta=\kappa^2+8>0$, για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$.

β) Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$S=x_1+x_2=-\frac{-\kappa}{1}=\kappa \text{ και } P=x_1\cdot x_2=\frac{-2}{1}=-2$$

γ) Αν S΄ και P΄ αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των $\rho_1=2x_1$ και $\rho_2=2x_2$, θα είναι:

- $S'=\rho_1+\rho_2=2x_1+2x_2=2(x_1+x_2)=2\kappa$
- $P'=\rho_1\cdot\rho_2=(2x_1)(2x_2)=4x_1\cdot x_2=-8$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση, που έχει ρίζες τις ρ_1 και ρ_2, είναι η:

$$x^2-S'x+P'=0 \Leftrightarrow x^2-2\kappa x-8=0$$

B20. α) Για την εξίσωση $(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)(\lambda+2)$ (1) έχουμε:

- Για $\lambda=1$, γίνεται $0\cdot x=6$, που είναι αδύνατη.
- Για $\lambda=-1$, γίνεται $0\cdot x=0$, που είναι ταυτότητα.

β) Για να έχει μοναδική λύση η εξίσωση $(\lambda^2-1)x=(\lambda+1)(\lambda+2)$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\lambda^2-1\neq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1 \text{ και } \lambda\neq -1$$

Τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι:

$$x=\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{(\lambda-1)(\lambda+1)}=\frac{\lambda+2}{\lambda-1},\ \lambda\neq 1 \text{ και } \lambda\neq -1$$

B21. α) Το τριώνυμο $2x^2-3x-2$ έχει διακρίνουσα $\Delta=25$ και ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=-\frac{1}{2}$. Έτσι γράφεται:

$$2x^2-3x-2=2(x-2)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x-2)(2x+1)$$

β) Για να ορίζεται η παράσταση $K=\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$, θα πρέπει να ισχύει:

$$2x^2-3x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \text{ και } x\neq -\frac{1}{2}$$

Άρα η παράσταση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}-\left\{-\dfrac{1}{2},2\right\}$.

γ) Έχουμε:

$$K=\frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}=\frac{(x-2)^2}{(x-2)(2x+1)}=\frac{x-2}{2x+1},\ x\neq 2 \text{ και } x\neq -\frac{1}{2}$$

B22. α) Αφού $\alpha+\beta=2$,έχουμε διαδοχικά:

$$\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=-30 \Leftrightarrow \alpha\beta(\alpha+\beta)=-30 \Leftrightarrow 2\alpha\beta=-30 \Leftrightarrow \alpha\beta=-15$$

β) Αν S και P αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των α, β, θα έχουμε $S=\alpha+\beta=2$ και $P=\alpha\cdot\beta=-15$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση, με ρίζες τα α και β, είναι:

$$x^2-Sx+P=0 \Leftrightarrow x^2-2x-15=0$$

Τα α, β θα προκύψουν ως λύσεις της εξίσωσης αυτής.

Έχουμε $\Delta=64$ και οι ρίζες είναι:

$$x_1=5=\alpha \text{ και } x_2=-3=\beta \ (\text{ή } \beta=5 \text{ και } \alpha=-3)$$

B23. α) Για να ορίζεται η παράσταση $A=\dfrac{1+x}{x-1}$, θα πρέπει να ισχύει:

$$x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$$

Για να ορίζεται η παράσταση $B=\dfrac{2}{x^2-x}$, θα πρέπει να ισχύει:

$$x^2-x\neq 0 \Leftrightarrow x(x-1)\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 0 \text{ και } x\neq 1$$

Άρα για να ορίζονται ταυτόχρονα οι παραστάσεις A και B, θα πρέπει $x\neq 0$ και $x\neq 1$. Δηλαδή οι παραστάσεις A και B ορίζονται ταυτόχρονα για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$.

β) Για $x\neq 0$ και $x\neq 1$, έχουμε διαδοχικά:

$$A = B \Leftrightarrow \frac{1+x}{x-1} = \frac{2}{x^2-x} \Leftrightarrow (1+x)(x^2-x) = 2(x-1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x(x+1)(x-1) = 2(x-1) \Leftrightarrow x(x+1)(x-1) - 2(x-1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-1)\left[x(x+1)-2\right] = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2) = 0$$

Από την τελευταία εξίσωση παίρνουμε $x-1=0$, από όπου προκύπτει $x=1$ (απορρίπτεται) ή $x^2+x-2=0$, από όπου προκύπτει $x_1=-2$ και $x_2=1$ (απορρίπτεται). Άρα η μόνη δεκτή λύση της εξίσωσης $A=B$ είναι η $x=-2$.

B24. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2+2\lambda x+4(\lambda-1)=0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι:

$$\Delta = 4\lambda^2 - 4\cdot 4(\lambda-1) = 4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = 4(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = 4(\lambda-2)^2$$

β) Επειδή $\Delta \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (η ισότητα ισχύει μόνο όταν $\lambda = 2$), η δοθείσα εξίσωση θα έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ (άνισες ή μία διπλή ρίζα).

γ) Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$S = \frac{-2\lambda}{1} = -2\lambda \ (1) \text{ και } P = \frac{4(\lambda-1)}{1} = 4(\lambda-1) \ (2)$$

Έτσι, από τις (1) και (2) έχουμε διαδοχικά:

$$(x_1+x_2)^2 + x_1x_2 + 5 = 0 \Leftrightarrow (-2\lambda)^2 + 4(\lambda-1) + 5 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

B25. α) i) Έχουμε:

$$A + B = \frac{1}{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{5-\sqrt{5}+5+\sqrt{5}}{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)} = \frac{10}{25-5} = \frac{1}{2}$$

ii) Έχουμε $A\cdot B = \frac{1}{5+\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{5-\sqrt{5}} = \frac{1}{\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)} = \frac{1}{20}$.

β) Η εξίσωση που έχει ρίζες τους αριθμούς Α και Β είναι:

$$x^2 - Sx + P = 0, \text{ όπου } S = A + B \text{ και } P = A\cdot B$$

Άρα θα είναι η εξίσωση $x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{20} = 0 \Leftrightarrow 20x^2 - 10x + 1 = 0$.

B26. α) Για $\lambda \neq -2$ η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$ (1) έχει διακρίνουσα:

$\Delta=(2\lambda)^2-4(\lambda+2)(\lambda-1)=4\lambda^2-4(\lambda^2-\lambda+2\lambda-2)=$

$=-4\lambda^2-4\lambda^2-4\lambda+8=-4\lambda+8$

Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, θα πρέπει:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow -4\lambda+8>0 \Leftrightarrow -4\lambda>-8 \Leftrightarrow \lambda<2$$

Επειδή όμως είναι $\lambda \neq -2$, τελικά έχουμε $\lambda \in (-\infty,-2)\cup(-2,2)$.

Άρα για τις τιμές $\lambda \in (-\infty,-2)\cup(-2,2)$ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

β) Από τον τύπο του Vieta για το άθροισμα S των ριζών της εξίσωσης (1) και για $\lambda \neq -2$, έχουμε:

$$S=2 \Leftrightarrow \frac{-2\lambda}{\lambda+2}=2 \Leftrightarrow 2\lambda+4=-2\lambda \Leftrightarrow 4\lambda=-4 \Leftrightarrow \lambda=-1$$

Η λύση αυτή είναι δεκτή, σύμφωνα με τους περιορισμούς του ερωτήματος (α).

B27. α) Για $\lambda \neq -2$ η εξίσωση $(\lambda+2)x^2+2\lambda x+\lambda-1=0$ (1) έχει διακρίνουσα:

$\Delta=(2\lambda)^2-4(\lambda+2)(\lambda-1)=4\lambda^2-4(\lambda^2-\lambda+2\lambda-2)=$

$=4\lambda^2-4\lambda^2-4\lambda+8=-4\lambda+8$

Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, πρέπει:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow -4\lambda+8>0 \Leftrightarrow -4\lambda>-8 \Leftrightarrow \lambda<2$$

Επειδή όμως είναι $\lambda \neq -2$, τελικά έχουμε $\lambda \in (-\infty,-2)\cup(-2,2)$.

Άρα για τις τιμές $\lambda \in (-\infty,-2)\cup(-2,2)$ η εξίσωση (1) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

β) Έχουμε:

$$P=x_1x_2=-3 \Leftrightarrow \frac{\lambda-1}{\lambda+2}=-3 \Leftrightarrow -3\lambda-6=\lambda-1 \Leftrightarrow -4\lambda=5 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{5}{4}$$

Η λύση αυτή είναι δεκτή, αφού $\lambda=-\frac{5}{4} \in (-\infty,-2)\cup(-2,2)$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. α) Με απαλοιφή των παρονομαστών στη δοσμένη εξίσωση, έχουμε ισοδύναμα:

$$\frac{t-1}{2}-\frac{t-2}{3}=\frac{t-3}{4} \Leftrightarrow 6(t-1)-4(t-2)=3(t-3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6t-6-4t+8=3t-9 \Leftrightarrow 6t-4t-3t=-9-8+6 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -t=-11 \Leftrightarrow t=11$$

β) Στη δοσμένη εξίσωση, θέτουμε $|x-3|=t\geq 0$ και έχουμε:

$$|x-3|=11 \Leftrightarrow x-3=11 \text{ ή } x-3=-11 \Leftrightarrow x=14 \text{ ή } x=-8$$

γ) Η δοσμένη εξίσωση έχει νόημα, όταν:

$$x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow |x|\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 1 \text{ ή } x\leq -1$$

Θέτουμε $\left|\sqrt[3]{x^2-1}+8\right|=\omega>0$ και έχουμε:

$$\left|\sqrt[3]{x^2-1}+8\right|=11 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1}+8=11 \text{ ή } \sqrt[3]{x^2-1}+8=-11$$

Άρα:

- $\sqrt[3]{x^2-1}+8=11 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1}=3 \Leftrightarrow x^2-1=27 \Leftrightarrow x^2=28 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x=2\sqrt{7} \text{ ή } x=-2\sqrt{7}$
- $\sqrt[3]{x^2-1}+8=-11 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2-1}=-19<0$ (απορρίπτεται)

Γ2. α) Η δοσμένη εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=25$ και ρίζες τις $y_1=4$ και $y_2=-1$.

β) Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$x^2(x-3)-3x(x-3)=4(x-3) \Leftrightarrow (x-3)(x^2-3x-4)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-3=0 \text{ ή } x^2-3x-4=0) \Leftrightarrow (x=3 \text{ ή } x=4 \text{ ή } x=-1)$$

γ) Στη δοσμένη εξίσωση, θέτουμε $x-5=t$ και έχουμε $t^2-3t-4=0$, με ρίζες τις $t_1=4$ και $t_2=-1$. Άρα:

$$x-5=4 \Leftrightarrow x=9 \text{ ή } x-5=-1 \Leftrightarrow x=4$$

δ) Η δοσμένη εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$(x-5)^2-(5-x)(x+1)=0 \Leftrightarrow (x-5)^2+(x-5)(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-5)\left[(x-5)+(x+1)\right]=0 \Leftrightarrow (x-5)(2x-4)=0$

Άρα $x-5=0 \Leftrightarrow x=5$ ή $2x-4=0 \Leftrightarrow x=2$

Γ3. **α)** Για $\lambda=3$, η εξίσωση (1) γίνεται $0\cdot x=0$, που είναι ταυτότητα (αληθεύει για όλες τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$).

β) Για $\lambda=-3$, η εξίσωση (1) γίνεται $0\cdot x=|-6| \Leftrightarrow 0\cdot x=6$, που είναι αδύνατη.

γ) Για $\lambda\neq 3$ και $\lambda\neq -3$, διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- $\lambda>3 \Leftrightarrow \lambda-3>0$, οπότε $|\lambda-3|=\lambda-3$ και άρα η εξίσωση γίνεται $(\lambda^2-9)x=\lambda-3$, η λύση της οποίας είναι:

$$x=\frac{\lambda-3}{\lambda^2-9} \Leftrightarrow x=\frac{\lambda-3}{(\lambda-3)(\lambda+3)} \Leftrightarrow x=\frac{1}{\lambda+3}$$

- $\lambda<3 \Leftrightarrow \lambda-3<0$,οπότε $|\lambda-3|=-(\lambda-3)$ και άρα η εξίσωση γίνεται $(\lambda^2-9)x=-(\lambda-3)$, η λύση της οποίας είναι:

$$x=-\frac{\lambda-3}{\lambda^2-9} \Leftrightarrow x=-\frac{\lambda-3}{(\lambda-3)(\lambda+3)} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{\lambda+3}$$

Γ4. Για τις παραστάσεις Α και Β έχουμε:

$A=9\lambda^2-12\lambda+4=(3\lambda-2)^2$

$B=4-9\lambda^2=(2-3\lambda)(2+3\lambda)$

α) Αν $3\lambda-2=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}$, τότε έχουμε $A=0$ και $B=0$ και η εξίσωση (1) γίνεται $0\cdot x=0$, η οποία είναι ταυτότητα (αληθεύει για όλες τις τιμές του $x\in\mathbb{R}$).

β) Αν $2+3\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-\frac{2}{3}$, τότε έχουμε $B=0$ και $A=16$ και η εξίσωση (1) γίνεται $0\cdot x=16$, η οποία είναι αδύνατη.

γ) Αν $\lambda\neq\frac{2}{3}$ και $\lambda\neq-\frac{2}{3}$, τότε η μοναδική λύση της εξίσωσης είναι:

$$x=\frac{A}{B}=\frac{(3\lambda-2)^2}{(2-3\lambda)(2+3\lambda)}=-\frac{(2-3\lambda)^2}{(2-3\lambda)(2+3\lambda)}=\frac{2-3\lambda}{2+3\lambda}$$

Γ5. **α)** Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_1 = \left[-\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\right]^2 - 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} =$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 - 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} =$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2 > 0$$

Άρα η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, οι οποίες είναι οι εξής:

$$x_{1,2} = \frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right) \pm \left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{2\sqrt{3}}$$

δηλαδή $x_1 = \dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$ και $x_2 = \dfrac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

β) Η εξίσωση $\sqrt{5}x^2 - \left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)x + \sqrt{3} = 0$ (2) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta_2 = \left[-\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\right]^2 - 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} =$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 - 4\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} =$$

$$= \left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{5} + \left(\sqrt{5}\right)^2 = \left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2 > 0$$

Άρα η εξίσωση (2) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, οι οποίες είναι οι εξής:

$$\rho_1 = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 \quad \text{και} \quad \rho_2 = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$$

όπου προφανώς $\rho_1 = \dfrac{1}{x_1}$ και $\rho_2 = \dfrac{1}{x_2}$.

γ) Με βάση τα προηγούμενα ερωτήματα, ισχυριζόμαστε ότι η εξίσωση που έχει ρίζες τις αντίστροφες των ριζών της εξίσωσης:

$$\sqrt{\alpha}\cdot x^2 - \left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)x + \sqrt{\beta} = 0 \text{ (I)}$$

είναι η $\sqrt{\beta}\cdot x^2 - \left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)x + \sqrt{\alpha} = 0$ (II) (α, $\beta > 0$ και $\alpha \neq \beta$).

Η απόδειξη του προηγούμενου ισχυρισμού γίνεται ως εξής:
Οι εξισώσεις (1) και (2) έχουν διακρίνουσες Δ_1 και Δ_2 αντίστοιχα, οι οποίες είναι ίσες μεταξύ τους. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \left[-\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)\right]^2 - 4\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} =$$

$$= \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 + 2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} + \left(\sqrt{\beta}\right)^2 - 4\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} =$$

$$= \left(\sqrt{\alpha}\right)^2 - 2\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} + \left(\sqrt{\beta}\right)^2 = \left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)^2 > 0$$

Οι ρίζες της εξίσωσης (1) είναι $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$, ενώ της εξίσωσης (2) είναι $\rho_1 = 1,\ \rho_2 = \dfrac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$. Προφανώς ισχύει ότι $\rho_1 = \dfrac{1}{x_1}$ και $\rho_2 = \dfrac{1}{x_2}$.

Γ6. **α)** Για να είναι η (1) εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, θα πρέπει να ισχύει:

$\alpha+\beta \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq -\beta$ (δηλαδή οι α, β να μην είναι αντίθετοι)

Σχόλιο: Αν $\alpha+\beta=0$, η εξίσωση γίνεται $4\alpha^2=0$, η οποία είναι αδύνατη αν $\alpha \neq 0$.

β) Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \left[-2(\alpha^2-\beta^2)\right]^2 - 4(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2 = 4(\alpha^2-\beta^2)^2 - 4(\alpha^2-\beta^2)^2 = 0$$

Άρα η εξίσωση έχει μία διπλή ρίζα.

γ) Η διπλή ρίζα της εξίσωσης (1) είναι:

$$x = \frac{2(\alpha^2-\beta^2)}{2(\alpha+\beta)^2} = \frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$$

Γ7. **α)** Η δοσμένη εξίσωση γράφεται ισοδύναμα:

$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 + 2\mu\nu = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - (\mu^2 + \nu^2 - 2\mu\nu) = 0 \quad (\text{I})$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης (Ι) είναι:

$$\Delta = (-2\lambda)^2 - 4\left[\lambda^2 - (\mu-\nu)^2\right] = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4(\mu-\nu)^2 = 4(\mu-\nu)^2 \geq 0$$

Άρα η εξίσωση (Ι) έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$.

β) • Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow \mu \neq \nu$, τότε οι άνισες ρίζες της (1) είναι:

$$x = \frac{2\lambda \pm 2(\mu - \nu)}{2} = \lambda \pm (\mu - \nu)$$

δηλαδή $x_1 = \lambda + \mu - \nu$ και $x_2 = \lambda - \mu + \nu$.

• Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \mu = \nu$, τότε η εξίσωση γίνεται:

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow (x - \lambda)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \lambda$$

δηλαδή έχει μία διπλή ρίζα, τη $x = \lambda$.

Γ8. Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2 - \mu x + \nu = 0$ είναι $\Delta = \mu^2 - 4\nu > 0$, άρα η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, τις x_1, x_2 με $S = \mu$ και $P = \nu$, όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο των x_1, x_2 αντίστοιχα.

α) Η εξίσωση που έχει ρίζες τις αντίθετες των x_1, x_2, δηλαδή τις $\rho_1 = -x_1$ και $\rho_2 = -x_2$, θα έχει:

$S_1 = \rho_1 + \rho_2 = -(x_1 + x_2) = -S = -\mu$ και $P_1 = \rho_1 \cdot \rho_2 = x_1 \cdot x_2 = P = \nu$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι $x^2 - S_1 x + P_1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \mu x + \nu = 0$.

β) Η εξίσωση $x^2 - \mu x + \nu = 0$ δεν έχει ρίζα το 0, αφού $0^2 - \mu \cdot 0 + \nu = \nu \neq 0$. Η εξίσωση που έχει ρίζες τις αντίστροφες των x_1, x_2, δηλαδή τις $\rho_3 = \frac{1}{x_1}$ και $\rho_4 = \frac{1}{x_2}$, θα έχει:

$$S_2 = \rho_3 + \rho_4 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} = \frac{\mu}{\nu} \text{ και}$$

$$P_2 = \rho_3 \cdot \rho_4 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} = \frac{1}{x_1 x_2} = \frac{1}{\nu}$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$x^2 - S_2 x + P_2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{\mu}{\nu} \cdot x + \frac{1}{\nu} = 0 \Leftrightarrow \nu x^2 - \mu x + 1 = 0$$

γ) i) Αν υποθέσουμε ότι $x_1 > x_2$, τότε $x_1 - x_2 = \sqrt{5}$. Τώρα έχουμε:

$$(x_1 - x_2)^2 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 5 \Leftrightarrow S^2 - 4P = 5 \Leftrightarrow \mu^2 - 4\nu = 5$$

δηλαδή $\mu^2 - 4\mu - 5 = 0$ με ρίζες τις $\mu = 5$ ή $\mu = -1$ (απορρίπτεται αφού $\mu \in \mathbb{N} - \{0\}$).

Άρα για $\nu = \mu = 5$ οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης διαφέρουν κατά $\sqrt{5}$

ii) Θα είναι:

$$S = \mu \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \mu \Leftrightarrow x_1 + x_1^2 = \mu \text{ και}$$

$$P = \mu \Leftrightarrow x_1 x_2 = \mu \Leftrightarrow x_1^3 = \mu$$

Άρα $x_1^3 - x_1^2 - x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1(x_1^2 - x_1 - 1) = 0$. Έτσι θα έχουμε:

$$\left(x_1 = 0 \text{ (απορρίπτεται) ή } x_1^2 - x_1 - 1 = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ή } x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

- Αν $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, είναι $x_2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$, οπότε:

$$\nu = \mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{3+\sqrt{5}}{2} = 2 + \sqrt{5}$$

- Αν $x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, είναι $x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, οπότε:

$$\nu = \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2} + \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 2 - \sqrt{5}$$

Γ9. **α)** Η εξίσωση (1) έχει διακρίνουσα $\Delta = 13^2 - 4 \cdot 36 = 25$ και ρίζες τις $x_1 = 9$ και $x_2 = 4$.

β) Η εξίσωση (2) είναι διτετράγωνη και έτσι, θέτουμε $x^2 = y \geq 0$ και έχουμε:

$y^2 - 13y + 36 = 0$, η οποία λύθηκε στο ερώτημα (α) και είναι:

$y_1 = 9 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -3$

$y_2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x_3 = 2,\ x_4 = -2$

Άρα η εξίσωση (2) έχει τέσσερις άνισες ρίζες, τις:

$$x_1 = 3,\ x_2 = -3,\ x_3 = 2,\ x_4 = -2$$

γ) Θέτουμε $|x-2|=t\geq 0$ και παίρνουμε $t^2-13t+36=0$, η οποία έχει λυθεί στο ερώτημα (α) με:

$t_1=9 \Leftrightarrow |x-2|=9 \Leftrightarrow x-2=9$ ή $x-2=-9 \Leftrightarrow x=11$ ή $x=-7$

$t_2=4 \Leftrightarrow |x-2|=4 \Leftrightarrow x-2=4$ ή $x-2=-4 \Leftrightarrow x=6$ ή $x=-2$

Άρα η εξίσωση (2) έχει τέσσερις άνισες ρίζες, τις:

$$x=11,\ x=-7,\ x=6,\ x=-2$$

Γ10. Η εξίσωση $x^2-2\kappa x+\lambda=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=4\kappa^2-4\lambda=4(\kappa^2-\lambda)$, με $\kappa,\lambda\in\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$. Τα αποτελέσματα του πειράματος τύχης της ρίψης των δύο ζαριών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου, με $N(\Omega)=36$.

κ / λ	1	2	3	4	5	6
1	1, 1	1, 2	1, 3	1, 4	1, 5	1, 6
2	2, 1	2, 2	2, 3	2, 4	2, 5	2, 6
3	3, 1	3, 2	3, 3	3, 4	3, 5	3, 6
4	4, 1	4, 2	4, 3	4, 4	4, 5	4, 6
5	5, 1	5, 2	5, 3	5, 4	5, 5	5, 6
6	6, 1	6, 2	6, 3	6, 4	6, 5	6, 6

α) Για να έχει η εξίσωση (1) δύο άνισες πραγματικές ρίζες, θα πρέπει να ισχύει:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow 4(\kappa^2-\lambda)>0 \Leftrightarrow \kappa^2-\lambda>0 \Leftrightarrow \kappa^2>\lambda$$

Άρα αν Α είναι το ενδεχόμενο: «Η εξίσωση (1) να έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες», τότε:

$$N(A)=27 \text{ και } P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{27}{36}=\frac{3}{4}$$

β) Για να έχει η εξίσωση (1) δύο ίσες πραγματικές ρίζες, θα πρέπει να ισχύει:

$$\Delta=0 \Leftrightarrow 4(\kappa^2-\lambda)=0 \Leftrightarrow \kappa^2-\lambda=0 \Leftrightarrow \kappa^2=\lambda$$

Άρα αν Β είναι το ενδεχόμενο: «Η εξίσωση (1) να έχει δύο ίσες πραγματικές ρίζες», τότε $B=\{(1,1),(2,4)\}$, με $N(B)=2$ και άρα $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$.

γ) Για να μην έχει η εξίσωση (1) πραγματικές ρίζες, θα πρέπει να ισχύει:

$$\Delta<0 \Leftrightarrow 4(\kappa^2-\lambda)<0 \Leftrightarrow \kappa^2-\lambda<0 \Leftrightarrow \kappa^2<\lambda$$

Άρα αν Γ είναι το ενδεχόμενο: «Η εξίσωση (1) να μην έχει πραγματικές ρίζες», τότε $\Gamma=\{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,5),(2,6)\}$, με $N(\Gamma)=7$ και άρα $P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{7}{36}$.

Σχόλιο: Το ερώτημα (γ) λύνεται ευκολότερα ως εξής:

$$P(\Gamma)=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)=1-\frac{27}{36}-\frac{2}{36}=\frac{7}{36}$$

Δηλαδή το ενδεχόμενο Γ είναι το αντίθετο του ενδεχομένου «η εξίσωση (1) να έχει πραγματικές ρίζες», δηλαδή αντίθετο του ενδεχομένου $A\cup B$.

Γ11. α) Για να είναι η εξίσωση $P(A)x^2-2P(A\cup B)x+4P(B)=0$ (1) εξίσωση 2ου βαθμού, θα πρέπει $P(A)\neq\varnothing$, δηλαδή το ενδεχόμενο Α να μην είναι αδύνατο.

β) Για να είναι η εξίσωση $P(A)x^2-2P(A\cup B)x+4P(B)=0$ (1) εξίσωση 1ου βαθμού, θα πρέπει $P(A)=0$, δηλαδή το ενδεχόμενο Α να είναι αδύνατο.

Τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$-2P(A\cup B)x+4P(B)=0 \Leftrightarrow -2\left[P(A)+P(B)\right]x+4P(B)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2P(B)x=4P(B) \quad (2)$$

Άρα διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $P(B)=0$, τότε η εξίσωση (2) γίνεται $0\cdot x=0$ (ταυτότητα)
- Αν $P(B)\neq 0$, τότε η εξίσωση (2) έχει μοναδική λύση τη $x=\frac{4P(B)}{2P(B)}\Leftrightarrow x=2$

γ) Αφού τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ασυμβίβαστα και $A\neq\varnothing$, θα είναι:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

Η εξίσωση $P(A)x^2 - 2P(A \cup B)x + 4P(B) = 0$ (1) έχει διακρίνουσα:

$\Delta = [-2P(A \cup B)]^2 + 4P(A) \cdot 4P(B) = 4[P(A \cup B)]^2 - 16P(A) \cdot P(B) =$

$= 4[P(A) + P(B)]^2 - 16P(A) \cdot P(B) =$

$= 4[P(A)]^2 + 8P(A) \cdot P(B) + 4[P(B)]^2 - 16P(A) \cdot P(B) =$

$= 4[P(A)]^2 - 8P(A) \cdot P(B) + 4[P(B)]^2 = 4[P(A) - P(B)]^2 \geq 0$

Άρα η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες αν $A \neq \varnothing$.

δ) Αφού $A \neq \varnothing$ και η εξίσωση (1) έχει μία διπλή ρίζα, θα είναι:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow 4[P(A) - P(B)]^2 = 0 \Leftrightarrow P(A) = P(B)$$

Δηλαδή τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ισοπίθανα και προφανώς $B \neq \varnothing$). Τώρα έχουμε:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) \text{ και}$$
$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = P(B)$$

Επομένως ισχύει ότι $P(A - B) = P(B - A)$, δηλαδή τα ενδεχόμενα $A - B$ και $B - A$ είναι ισοπίθανα.

Γ12. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2 - |\kappa - 1|x + \kappa^2 = 0,\ \kappa \in \mathbb{R}$ (1) είναι:

$\Delta = (-|\kappa - 1|)^2 - 4\kappa^2 = (\kappa - 1)^2 - 4\kappa^2 = \kappa^2 - 2\kappa + 1 - 4\kappa^2 = -3\kappa^2 - 2\kappa + 1$

Για να έχει η εξίσωση (1) μία διπλή ρίζα, θα πρέπει να ισχύει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow -3\kappa^2 - 2\kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -1 \text{ ή } \kappa = \frac{1}{3}$$

Άρα για $\kappa = -1$ και $\kappa = \frac{1}{3}$, η εξίσωση (1) έχει διπλή ρίζα.

β) Έχουμε $|\kappa - 1| = 2 \Leftrightarrow (\kappa - 1 = 2 \text{ ή } \kappa - 1 = -2) \Leftrightarrow (\kappa = 3 \text{ ή } \kappa = -1)$.

- Για $\kappa = 3$, η εξίσωση (1) γίνεται $x^2 - 2x + 9 = 0$ με διακρίνουσα $\Delta_1 = -32 < 0$, άρα η εξίσωση (1) είναι αδύνατη.
- Για $\kappa = -1$, η εξίσωση (1) γίνεται:

  $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (διπλή ρίζα).

γ) Έχουμε:

$\Delta = (-|\kappa - 1|)^2 - 4\kappa^2 = (\kappa - 1)^2 - 4\kappa^2 = (\kappa - 1)^2 - (2\kappa)^2 =$

$= (\kappa - 1 - 2\kappa)(\kappa - 1 + 2\kappa) = (-\kappa - 1)(3\kappa - 1) = -(\kappa + 1)(3\kappa - 1) > 0$

$\left(\text{αφού έχουμε } \kappa < \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\kappa - 1 < 0 \text{ και } \kappa > -1 \Leftrightarrow \kappa + 1 > 0\right)$.

Άρα για $-1 < \kappa < \frac{1}{3}$, η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες.

δ) Για $-1 < \kappa < \frac{1}{3}$, η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες, έστω x_1, x_2. Αν S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών x_1, x_2, τότε έχουμε:

$$S = |\kappa - 1| = 1 - \kappa \ (\mathrm{I})$$

$\left(\text{αφού } -1 < \kappa < \frac{1}{3} < 1 \Leftrightarrow \kappa - 1 < 0 \Leftrightarrow |\kappa - 1| = 1 - \kappa\right)$ και $P(\kappa) = \kappa^2$ (II)

Αν τώρα S΄ και P΄ αντίστοιχα είναι το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης που έχει ρίζες τις x_1, x_2 αυξημένες κατά 3, θα έχουμε (λαμβάνοντας υπόψη τις σχέσεις (I) και (II)):

$$S' = (x_1 + 3) + (x_2 + 3) = (x_1 + x_2) + 6 = S + 6 = 1 - \kappa + 6 = 7 - \kappa$$

$$P' = (x_1 + 3)(x_2 + 3) = x_1 x_2 + 3(x_1 + x_2) + 9 = P + 3S + 9 =$$
$$= \kappa^2 + 3(1 - \kappa) + 9 = \kappa^2 + 3 - 3\kappa + 9 = \kappa^2 - 3\kappa + 12$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι:

$$x^2 - S'x + P' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (7 - \kappa)x + \kappa^2 - 3\kappa + 12 = 0, \quad -1 < \kappa < \frac{1}{3}$$

Γ13. Η διακρίνουσα Δ της δοθείσας εξίσωσης είναι:

$\Delta = \left(|\lambda - 1| - 2\right)^2 - 4\left(|2\lambda - 2| - 4\right) = \left(|\lambda - 1| - 2\right)^2 - 8\left(|\lambda - 1| - 2\right)$ και το πλήθος των απλών ενδεχομένων του δειγματικού χώρου Ω είναι $N(\Omega) = 8$.

α) Για να έχει η δοθείσα εξίσωση (1) δύο πραγματικές και ίσες ρίζες (δηλαδή μία διπλή ρίζα), θα πρέπει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(|\lambda - 1| - 2\right)^2 - 4\left(|2\lambda - 2| - 4\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(|\lambda - 1| - 2\right)^2 - 8\left(|\lambda - 1| - 2\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(|\lambda - 1| - 2\right)\left[\left(|\lambda - 1| - 2\right) - 8\right] = 0 \Leftrightarrow \left(|\lambda - 1| - 2\right)\left(|\lambda - 1| - 10\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(|\lambda - 1| - 2 = 0 \ \text{ ή } \ |\lambda - 1| - 10 = 0\right)$$

Είναι:

- $|\lambda-1|-2=0 \Leftrightarrow |\lambda-1|=2 \Leftrightarrow (\lambda-1=2 \text{ ή } \lambda-1=-2) \Leftrightarrow (\lambda=3 \text{ ή } \lambda=-1)$
- $|\lambda-1|-10=0 \Leftrightarrow |\lambda-1|=10 \Leftrightarrow (\lambda-1=10 \text{ ή } \lambda-1=-10) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (\lambda=11 \text{ ή } \lambda=-9)$

Συνεπώς το ενδεχόμενο Α είναι $A=\{-9,\ 3,\ 11\}$, δηλαδή το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων του Α είναι $N(A)=3$.

Άρα $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{3}{8}$.

β) Για να έχει η δοθείσα εξίσωση δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, θα πρέπει:

$$\Delta>0 \Leftrightarrow \left(|\lambda-1|-2\right)^2-8\left(|\lambda-1|-2\right)>0$$

Θέτουμε $\omega=|\lambda-1|-2$, οπότε είναι:

$$\omega^2-8\omega>0 \Leftrightarrow \omega(\omega-8)>0$$

Αν $\omega<0$ ή $\omega>8$, τότε $\Delta>0$ και άρα:

- $|\lambda-1|-2<0 \Leftrightarrow |\lambda-1|<2 \Leftrightarrow -2<\lambda-1<2 \Leftrightarrow -1<\lambda<3$
- $|\lambda-1|-2>8 \Leftrightarrow |\lambda-1|>10 \Leftrightarrow (\lambda-1>10 \text{ ή } \lambda-1<-10) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (\lambda>11 \text{ ή } \lambda<-9)$

Συνεπώς το ενδεχόμενο Β είναι $B=\left\{-10, 0, \dfrac{1}{2}\right\}$, δηλαδή το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων του Β είναι $N(B)=3$.

Άρα $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{3}{8}$.

γ) **1^{ος} τρόπος**

Μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα με την ίδια διαδικασία που ακολουθήσαμε στα προηγούμενα ερωτήματα, αφού το Γ ικανοποιείται όταν:

$$\Delta<0 \Leftrightarrow 0<|\lambda-1|-2<8 \Leftrightarrow \left(|\lambda-1|<10 \text{ και } |\lambda-1|>2\right)$$

$$\left((-9<\lambda<11) \text{ και } (\lambda>3 \text{ ή } \lambda<-1)\right)$$

Τελικά προκύπτει ότι $-9<\lambda<-1$ ή $3<\lambda<11$.

Άρα το ενδεχόμενο Γ είναι $\Gamma=\left\{-3, \dfrac{10}{3}\right\}$, δηλαδή το πλήθος των ευνοϊκών περιπτώσεων του Γ είναι $N(\Gamma)=2$ και έτσι έχουμε:

$$P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

2ος τρόπος (Θα πρέπει όμως να είναι $A\cup B\cup \Gamma=\Omega$, που στην περίπτωσή μας η προϋπόθεση αυτή ικανοποιείται.)

Είναι $\Gamma=(A\cup B)'$ και άρα:

$$P(\Gamma)=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=$$

$$=1-\big(P(A)+P(B)\big)=1-\frac{6}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

(αφού τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους).

Γ14. α) Για την εξίσωση (1), έχουμε:

$$|2x-1|=3\Leftrightarrow(2x-1=3 \text{ ή } 2x-1=-3)\Leftrightarrow(x=2 \text{ ή } x=-1)$$

Για την εξίσωση (2), θα πρέπει αρχικά να ισχύει:

$$2x+2\geq 0\Leftrightarrow 2x\geq -2\Leftrightarrow x\geq -1$$

Έχουμε:

$$|3x+3|=2x+2\Leftrightarrow(3x+3=2x+2 \text{ ή } 3x+3=-2x-2)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \text{ (δεκτή)}$$

β) Αν $x_1=2$ και $x_2=-1$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης (1), το άθροισμα S και το γινόμενο τους P αντίστοιχα είναι $S=x_1+x_2=1$ και $P=x_1x_2=-2$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση 2ου βαθμού, που έχει ως ρίζες τις x_1, x_2, είναι $x^2-Sx+P=0\Leftrightarrow x^2-x-2=0$.

γ) Αφού η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+1=0$ έχει διπλή ρίζα, θα είναι:

$$\Delta=0\Leftrightarrow \beta^2-4\alpha=0\Leftrightarrow \beta^2=4\alpha \ \text{(I)}$$

Επίσης, αφού έχει λύση την κοινή λύση των εξισώσεων (1) και (2), θα επαληθεύεται από τη $x=-1$, από όπου παίρνουμε:

$$\alpha-\beta+1=0\Leftrightarrow \alpha=\beta-1 \ \text{(II)}$$

Από τις σχέσεις (I) και (II) έχουμε:

$$\beta^2=4(\beta-1)\Leftrightarrow \beta^2-4\beta+4=0\Leftrightarrow(\beta-2)^2=0\Leftrightarrow\beta=2$$

Από τη σχέση (I) έχουμε $4\alpha=4\Leftrightarrow\alpha=1$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση, που έχει διπλή ρίζα τον αριθμό $x=-1$, είναι $x^2+2x+1=0$.

Γ15. α) Για να έχει η εξίσωση (1) δύο άνισες ρίζες, θα πρέπει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 12\nu > 0 \Leftrightarrow \mu^2 > 12\nu$$

Ακόμα, αφού $S = \mu$ και $P = 3\nu$, θα είναι:

$$\mu^2 > 12\nu \Leftrightarrow S^2 > 4\cdot 3\nu \Leftrightarrow S^2 > 4P$$

β) Από τη σχέση (2) έχουμε διαδοχικά:

$3\rho_1 + 3\rho_2 = 2\rho_1\rho_2 \Leftrightarrow 3(\rho_1+\rho_2) = 2\rho_1\rho_2 \Leftrightarrow 3S = 2P \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\mu = 6\nu \Leftrightarrow \mu = 2\nu$ (I)

Από τη σχέση (3) έχουμε διαδοχικά:

$3 - \rho_1\rho_2 = 5(\rho_1 + \rho_2 - 2) \Leftrightarrow 3 - P = 5(S-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3 - 3\nu = 5(\mu - 2) \Leftrightarrow 3 - 3\nu = 5\mu - 10$ (II)

Από τις σχέσεις (I) και (II) έχουμε:

$$3 - 3\nu = 10\nu - 10 \Leftrightarrow -13\nu = -13 \Leftrightarrow \nu = 1$$

Άρα $\nu = 1$ και $\mu = 2$.

Γ16. α) Για να είναι η εξίσωση $(2\lambda-1)x^2 - |4\lambda-2|x + 4\lambda^2 - 1 = 0$ (1) εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, θα πρέπει $2\lambda - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \lambda \neq \frac{1}{2}$.

β) Η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$\Delta = \left[-|4\lambda-2|\right]^2 - 4(2\lambda-1)(4\lambda^2-1) = 4(2\lambda-1)^2 - 4(2\lambda-1)(4\lambda^2-1) =$

$= 4(2\lambda-1)^2 - 4(2\lambda-1)^2(2\lambda+1) = 4(2\lambda-1)^2\left[1-(2\lambda+1)\right] = -8\lambda(2\lambda-1)^2$

γ) Για να έχει η (1) δύο άνισες ρίζες, θα πρέπει:

$\Delta > 0 \Leftrightarrow -8\lambda(2\lambda-1)^2 > 0 \Leftrightarrow -8\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda < 0$

Για να είναι η (1) αδύνατη, θα πρέπει:

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow -8\lambda(2\lambda-1)^2 < 0 \Leftrightarrow -8\lambda < 0 \Leftrightarrow \lambda > 0$$

και αφού $\lambda \neq \frac{1}{2}$, θα είναι $\lambda \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

δ) Έστω S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της εξίσωσης (1), όταν έχει δύο άνισες ρίζες, δηλαδή όταν $\lambda < 0$. Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$S = \dfrac{|4\lambda-2|}{2\lambda-1} = \dfrac{2|2\lambda-1|}{2\lambda-1}, \lambda \neq \dfrac{1}{2}$ (I) και

$$P=\frac{4\lambda^2-1}{2\lambda-1}=\frac{(2\lambda+1)(2\lambda-1)}{2\lambda-1}=2\lambda+1,\ \lambda\neq\frac{1}{2}\quad (\text{II})$$

Για να είναι οι ρίζες ομόσημες, θα πρέπει:

$$P>0\Leftrightarrow 2\lambda+1>0\Leftrightarrow \lambda>-\frac{1}{2}$$

Άρα θα είναι $-\frac{1}{2}<\lambda<0$, οπότε ισχύει $-\frac{1}{2}<\lambda<0<\frac{1}{2}$, απ' όπου προκύπτει ότι:

$$2\lambda-1<0\Leftrightarrow |2\lambda-1|=-(2\lambda-1)$$

Επομένως είναι $S=\frac{2|2\lambda-1|}{2\lambda-1}=\frac{-2(2\lambda-1)}{2\lambda-1}=-2<0.$

Άρα η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες αρνητικές για $-\frac{1}{2}<\lambda<0.$

Γ17. α) Για να είναι $2^{ου}$ βαθμού η εξίσωση (1), θα πρέπει:

$$2P(A)-1\neq 0\Leftrightarrow P(A)\neq\frac{1}{2}$$

και ακόμα $0<P(A)\leq 1$, δηλαδή σε μορφή ένωσης διαστημάτων γράφεται $P(A)\in\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right]$.

β) Η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι:

$$\Delta=\left[-|4P(A')-2|\right]^2-4\left[2P(A)-1\right]\cdot\left[-4\left(P(A)\right)^2+1\right]=$$

$$=4\left[2P(A')-1\right]^2-4\left[2P(A)-1\right]\left[1-\left(2P(A)\right)^2\right]=$$

$$=4\left[2\left(1-P(A)\right)-1\right]^2+4\left[2P(A)-1\right]^2\left[2P(A)+1\right]=$$

$$=4\left[1-2P(A)\right]^2+4\left[2P(A)-1\right]^2\left[2P(A)+1\right]=$$

$$=4\left[1-2P(A)\right]^2\left[1+2P(A)+1\right]=8\left[2P(A)-1\right]^2\left[1+P(A)\right]>0$$

και άρα η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

γ) Αν S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών της εξίσωσης (1), θα έχουμε $S=\frac{|4P(A')-2|}{2P(A)-1}=\frac{2|2P(A)-1|}{2P(A)-1}$ και:

$$P=\frac{1-4\left[P(A)\right]^2}{2P(A)-1}=\frac{\left[1-2P(A)\right]\left[1+2P(A)\right]}{2P(A)-1}=-\left[1+2P(A)\right]<0$$

οπότε η εξίσωση (1) έχει ρίζες ετερόσημες.

Γ18. α) Αρχικά θα πρέπει να ισχύει $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$. Έχουμε:

$$\left|x^2-6x+9\right|=x-1 \Leftrightarrow \left|(x-3)^2\right|=x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2=x-1 \Leftrightarrow x^2-6x+9=x-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-7x+10=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει διακρίνουσα $\Delta=9$ και ρίζες τις $x_1=5$ και $x_2=2$.

β) Αρχικά πρέπει $x^2-2x+1\neq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$.

Για $x\neq 1$, έχουμε:

$$A=1 \Leftrightarrow \frac{|3x-3|}{x^2-2x+1}=1 \Leftrightarrow 3|x-1|=x^2-2x+1 \Leftrightarrow 3|x-1|=(x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x-1|^2-3|x-1|=0 \Leftrightarrow |x-1|\left(|x-1|-3\right)=0$$

Επομένως έχουμε:

- $|x-1|=0 \Leftrightarrow x=1$ (απορρίπτεται) ή
- $|x-1|-3=0 \Leftrightarrow |x-1|=3 \Leftrightarrow (x-1=3 \text{ ή } x-1=-3) \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x=4 \text{ ή } x=-2)$

γ) Η μεγαλύτερη και η μικρότερη από τις ρίζες των εξισώσεων στα ερωτήματα (α) και (β) είναι 5 και –2 αντίστοιχα. Αφού οι αριθμοί αυτοί είναι ρίζες της εξίσωσης (2), θα έχουμε:

$$S=5-2-\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha}=3 \Leftrightarrow \sqrt{\beta}=-3\alpha>0 \Leftrightarrow \alpha<0 \text{ και}$$

$$P=5\cdot(-2)\cdot\frac{\gamma}{\alpha}=-10 \Leftrightarrow \gamma=-10\alpha>0$$

Σχόλιο: Η εξίσωση (2) έχει δύο ρίζες, αν και μόνο αν:

$$\left(\sqrt{\beta}\right)^2-4\alpha\gamma>0 \Leftrightarrow \beta>4\alpha\gamma$$

που αληθεύει από τα δεδομένα.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. α) Έχουμε $\Delta = 16 - 4(2-\lambda^2) = 4\lambda^2 + 8 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και άρα η εξίσωση έχει 2 άνισες πραγματικές ρίζες.

β) Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta έχουμε:

i) $S = x_1 + x_2 = \frac{4}{1} = 4$

ii) $P = x_1 x_2 = \frac{2-\lambda^2}{1} = 2 - \lambda^2$

γ) Αφού γνωρίζουμε τη μία ρίζα, έστω $x_1 = 2 + \sqrt{3}$, θα έχουμε:

i) $S = 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{3} + x_2 = 4 \Leftrightarrow x_2 = 2 - \sqrt{3}$

ii) Για την εύρεση του $\lambda \in \mathbb{R}$ θα έχουμε:

$$P = x_1 \cdot x_2 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 - 3 = 2 - \lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1$$

Δ2. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $(\lambda+2)x^2 + (2\lambda+3)x + \lambda - 2 = 0$ είναι:

$\Delta = (2\lambda+3)^2 - 4(\lambda+2)(\lambda-2) = 4\lambda^2 + 12\lambda + 9 - 4\lambda^2 + 16 = 12\lambda + 25$,
$\lambda \neq -2$

β) Για να έχει η εξίσωση δύο πραγματικές και άνισες ρίζες, θα πρέπει:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 12\lambda + 25 > 0 \Leftrightarrow \lambda > -\frac{25}{12}$$

και επειδή $\lambda \neq -2$, θα είναι $\lambda \in \left(-\frac{25}{12}, -2\right) \cup (-2, \infty)$.

γ) Σύμφωνα με τους τύπους του Vieta έχουμε:

$S = x_1 + x_2 = -\frac{2\lambda+3}{\lambda+2}, \lambda \neq -2$

$P = x_1 x_2 = \frac{\lambda-2}{\lambda+2}, \lambda \neq -2$

δ) Με βάση το ερώτημα (α), έχουμε διαδοχικά:

$(x_1+x_2-1)^2+(x_1x_2+3)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1+x_2-1=0 \text{ και } x_1x_2+3=0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (S=1 \text{ και } P=-3) \Leftrightarrow \left(-\dfrac{2\lambda+3}{\lambda+2}=1 \text{ και } \dfrac{\lambda-2}{\lambda+2}=-3\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-2\lambda-3=\lambda+2 \text{ και } \lambda-2=-3\lambda-6) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\lambda=-\dfrac{5}{3} \text{ και } \lambda=-1\right)$

Άρα δεν υπάρχει τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, ώστε για τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης (1) να ισχύει η δοθείσα σχέση.

Δ3. **α)** Έχουμε:

$\Delta=(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2=\alpha^4+2\alpha^2\beta^2+\beta^4-4\alpha^2\beta^2=$

$=\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4=(\alpha^2-\beta^2)^2$

β) Για να έχει η δοθείσα εξίσωση δύο άνισες ρίζες, θα πρέπει να ισχύει $\Delta>0 \Leftrightarrow (\alpha^2-\beta^2)^2>0$, που είναι αληθής για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha^2\neq\beta^2 \Leftrightarrow |\alpha|\neq|\beta| \Leftrightarrow \alpha\neq\beta$ (αφού οι α,β είναι θετικοί αριθμοί).

Άρα η σχέση μεταξύ των αριθμών α και β, ώστε η δοθείσα εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες, είναι $\alpha\neq\beta$.

Τότε οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2}=\frac{(\alpha^2+\beta^2)\pm(\alpha^2-\beta^2)}{2\alpha\beta} \Leftrightarrow \left(x_1=\frac{\alpha}{\beta} \text{ και } x_2=\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

γ) ***α΄τρόπος***:

Από τους τύπους του Vieta έχουμε $S=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}$ και $P=1$. Άρα θα είναι:

$(1+x_1)(1+x_2)\geq 4 \Leftrightarrow 1+x_1+x_2+x_1x_2\geq 4 \Leftrightarrow 1+S+P\geq 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2+\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta}\geq 4 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}{\alpha\beta}\geq 4 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$

που είναι αληθής για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

β΄τρόπος: Αφού οι ρίζες είναι $x_1 = \frac{\alpha}{\beta}$ και $x_2 = \frac{\beta}{\alpha}$, αντικαθιστώντας στην προς απόδειξη σχέση, έχουμε:

$$(1+x_1)(1+x_2) \geq 4 \Leftrightarrow \left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(1+\frac{\beta}{\alpha}\right) \geq 4 \Leftrightarrow 1+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}+1 \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2+\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta} \geq 4 \Leftrightarrow \frac{2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta} \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$$

που είναι αληθής για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Σχόλιο: Η σχέση $(1+x_1)(1+x_2) \geq 4$ στην πραγματικότητα είναι $(1+x_1)(1+x_2) > 4$, αφού $\alpha \neq \beta$.

Δ4. α) Για να είναι η εξίσωση $(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+(\lambda-1)=0$ $2^{ου}$ βαθμού, θα πρέπει να ισχύει $\lambda^2-\lambda \neq 0 \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1) \neq 0 \Leftrightarrow (\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1)$.

β) Για $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, η δοθείσα εξίσωση ισοδύναμα γίνεται:

$$(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)x^2-(\lambda-1)(\lambda+1)x+(\lambda-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)\left[\lambda x^2-(\lambda+1)x+1\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0,\ \lambda \neq 1 \text{ και } \lambda \neq 0$$

γ) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$, $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 0$ (που είναι ισοδύναμη με τη δοθείσα εξίσωση (1)) είναι:

$$\Delta = \left[-(\lambda+1)\right]^2-4\lambda = \lambda^2+2\lambda+1-4\lambda = \lambda^2-2\lambda+1 = (\lambda-1)^2 > 0$$

αφού $\lambda \neq 1$. Άρα η εξίσωση $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$, $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq 0$, (άρα και η (1)) έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες.

δ) Αν $\lambda \neq 0$ και $\lambda \neq 1$, τότε οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{(\lambda+1) \pm \sqrt{(\lambda-1)^2}}{2\lambda} = \frac{(\lambda+1) \pm |\lambda-1|}{2\lambda}$$

δηλαδή είναι:

$$x_1 = \frac{(\lambda+1)+(\lambda-1)}{2\lambda} = \frac{2\lambda}{2\lambda} = 1 \text{ και } x_2 = \frac{(\lambda+1)-(\lambda-1)}{2\lambda} = \frac{2}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

Δ5. **α)** Η εξίσωση $x^2-\lambda x+1=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=\lambda^2-4$. Για να έχει αυτή πραγματικές και άνισες ρίζες, θα πρέπει:

$$\Delta=\lambda^2-4>0 \Leftrightarrow \lambda^2>4 \Leftrightarrow |\lambda|>2 \Leftrightarrow (\lambda>2 \text{ ή } \lambda<-2)$$

β) Αν ο αριθμός ρ (είναι φανερό ότι $\rho\neq 0$) είναι ρίζα της εξίσωσης $x^2-\lambda x+1=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $\rho^2-\lambda\rho+1=0$ (Ι). Για να είναι και ο αριθμός $\frac{1}{\rho}$ επίσης ρίζα της εξίσωσης, θα πρέπει να ισχύει:

$$\frac{1}{\rho^2}-\lambda\cdot\frac{1}{\rho}+1=0 \Leftrightarrow 1-\lambda\rho+\rho^2=0 \Leftrightarrow \rho^2-\lambda\rho+1=0\ (\rho\neq 0)$$

η οποία αληθεύει λόγω της σχέσης (Ι).

γ) **i)** Από τους τύπους του Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=-\frac{-\lambda}{1}=\lambda$ (ΙΙ) και $P=x_1x_2=\frac{1}{1}=1>0$. Άρα οι ρίζες x_1, x_2 είναι ομόσημες (και αντίστροφες).

Επειδή $S=x_1+x_2=-\frac{-\lambda}{1}=\lambda>2>0$, οι ρίζες $x_1=\rho$ και $x_2=\frac{1}{\rho}$ (με $\rho\neq 0$) θα είναι θετικοί αριθμοί.

ii) Με βάση και τα προηγούμενα ερωτήματα, έχουμε διαδοχικά:

$$x_1+4x_2\geq 4 \Leftrightarrow \rho+\frac{4}{\rho}\geq 4 \Leftrightarrow \rho+\frac{4}{\rho}-4\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\rho^2+4-4\rho}{\rho}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(\rho-2)^2}{\rho}\geq 0,$$ η οποία αληθεύει, αφού $\rho>0$

(Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν $\rho=2$. Τότε οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης είναι 2 και $\frac{1}{2}$.)

Δ6. **α)** Η εξίσωση $\lambda x^2+2(\lambda-1)x+\lambda-2=0$ για $\lambda=0$ γίνεται:

$$-2x-2=0 \Leftrightarrow -2x=2 \Leftrightarrow x=-1$$

β) **i)** Για $\lambda \neq 0$, η εξίσωση $\lambda x^2 + 2(\lambda - 1)x + \lambda - 2 = 0$ είναι $2^{ου}$ βαθμού και η διακρίνουσά της είναι:

$\Delta = 4(\lambda-1)^2 - 4\lambda(\lambda-2) = 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda^2 + 8\lambda =$

$= 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda^2 + 8\lambda = 4 > 0$

Άρα η δοθείσα εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις x_1, x_2.

Οι ρίζες της είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-2(\lambda-1) \pm 2}{2\lambda} = \frac{-2\lambda + 2 \pm 2}{2\lambda}, \text{ δηλαδή}$$

$$x_1 = \frac{-2\lambda}{2\lambda} = -1 \text{ και } x_2 = \frac{-2\lambda + 4}{2\lambda} = \frac{2(2-\lambda)}{2\lambda} = \frac{2-\lambda}{\lambda} = -1 + \frac{2}{\lambda}, \lambda \neq 0$$

ii) Αν x_1 και x_2 οι δύο ρίζες του προηγούμενου ερωτήματος, θα έχουμε διαδοχικά:

$$|x_1 - x_2| > 1 \Leftrightarrow \left|-1 - \left(-1 + \frac{2}{\lambda}\right)\right| > 1 \Leftrightarrow \left|-\frac{2}{\lambda}\right| > 1 \Leftrightarrow \frac{2}{|\lambda|} > 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\lambda|}{2} < 1 \Leftrightarrow |\lambda| < 2$$

Άρα $-2 < \lambda < 2$ με $\lambda \neq 0$. Έτσι τελικά $\lambda \in (-2, 0) \cup (0, 2)$.

Δ7. **α)** Για την εξίσωση $x^2 - 3x + 2 = 0$ (1) έχουμε $\Delta = 1 > 0$ και $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

β) Η εξίσωση $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$ (2) είναι διτετράγωνη και έτσι θέτουμε $x^2 = \omega \geq 0$ και παίρνουμε $\omega^2 - 3\omega + 2 = 0$, που από το ερώτημα (α) έχει ρίζες τις:

- $\omega = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow (x_3 = 1 \text{ και } x_4 = -1)$
- $\omega = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow \left(x_5 = \sqrt{2} \text{ και } x_6 = -\sqrt{2}\right)$

Άρα η εξίσωση (2) έχει ρίζες τις $-\sqrt{2}$, -1, 1 και $\sqrt{2}$.

γ)[5] Το τριώνυμο $x^2+\beta x+\gamma$ θα πρέπει να έχει ρίζες δύο από τα στοιχεία του συνόλου $\left\{-\sqrt{2},-1,\ 1,\ \sqrt{2}\right\}$ και θα πρέπει να έχει θετική τιμή για κάθε $x\leq 0$. Χρησιμοποιώντας συνδυασμούς για τις 4 αυτές τιμές και βρίσκοντας τα S και P (αντίστοιχα άθροισμα και γινόμενο), καταλήγουμε ότι για $x=1$ και $y=\sqrt{2}$ είναι $S=x+y=1+\sqrt{2}$ και $P=xy=\sqrt{2}$. Άρα το τριώνυμο που έχει ρίζες τους αριθμούς x και y, είναι $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}$ και ισχύει ότι:

$$x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=(x-1)(x-\sqrt{2})>0,\ \text{για}\ x\leq 0$$

διότι:

- $x\leq 0<1\Leftrightarrow x-1<0$
- $x\leq 0<\sqrt{2}\Leftrightarrow x-\sqrt{2}<0$

Σχόλιο: Σύμφωνα με την εκφώνηση μπορούμε να πάρουμε και μία μόνο από τις τιμές του συνόλου. Στην περίπτωση αυτή το τριώνυμο θα έχει διπλή ρίζα την τιμή αυτή. Αν επιλέξουμε κάποια από τις θετικές τιμές του συνόλου, δηλαδή την τιμή 1 ή την τιμή $\sqrt{2}$, τότε το τριώνυμο θα έχει θετικές τιμές για κάθε αρνητικό αριθμό x (και θα μηδενίζεται μόνο στη ρίζα του).

Δ8. **α)** Αν S είναι το άθροισμα των δύο ριζών x_1 και x_2 της δοσμένης εξίσωσης, τότε έχουμε:

$$|x_1+x_2|=4\Leftrightarrow |S|=4\Leftrightarrow |\beta|=4\Leftrightarrow (\beta=4\ \text{ή}\ \beta=-4)$$

β) Αφού η εξίσωση $x^2-\beta|x|+\gamma=0$ έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες, θα είναι $\Delta=\beta^2-4\gamma>0\Leftrightarrow 16-4\gamma>0\Leftrightarrow 4\gamma<16\Leftrightarrow \gamma<4$.

γ) Για $\beta=-4$, η εξίσωση $x^2-\beta|x|+3=0$ γίνεται:

$$x^2+4|x|+3=0\Leftrightarrow |x|^2+4|x|+3=0\Leftrightarrow \left(|x|=-3\ \text{ή}\ |x|=-1\right)$$

Καταλήγουμε σε δύο εξισώσεις οι οποίες είναι αδύνατες στο $\mathbb{R}$.

5. Το ερώτημα αυτό μπορεί να λυθεί ευκολότερα με γνώσεις του 4^ου^ κεφαλαίου «Ανισώσεις», με βάση την παραγοντοποίηση τριωνύμου: $x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$, όπου x_1,x_2 οι ρίζες του.

Για $\beta = 4$, η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ γίνεται:

$$x^2 - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 4|x| + 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(|x| = 3 \text{ ή } |x| = 1\right) \Leftrightarrow \left(x = \pm 3 \text{ ή } x = \pm 1\right)$$

Άρα η εξίσωση $x^2 - \beta|x| + 3 = 0$ δεν έχει πραγματικές ρίζες μόνο για $\beta = -4$.

Δ9. α) Η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με $\lambda \neq 0$, έχει διακρίνουσα $\Delta = (2\lambda - 1)^2 - 4\lambda(\lambda - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 1$, δηλαδή ανεξάρτητη του λ.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x_{1,2} = \dfrac{-(2\lambda - 1) \pm 1}{2\lambda} = \dfrac{-2\lambda + 1 \pm 1}{2\lambda}$, δηλαδή $x_1 = \dfrac{-2\lambda}{2\lambda} = -1$ και $x_2 = \dfrac{-2\lambda + 2}{2\lambda} = \dfrac{1 - \lambda}{\lambda}$.

γ) Έχουμε διαδοχικά:

$$d(x_1, x_2) = 2 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 2 \Leftrightarrow \left|-1 - \frac{1 - \lambda}{\lambda}\right| = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|-\frac{1}{\lambda}\right| = 2 \Leftrightarrow |\lambda| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\lambda = \frac{1}{2} \text{ ή } \lambda = -\frac{1}{2}\right)$$

που είναι και οι δύο τιμές δεκτές ($\lambda \neq 0$).

Δ10. α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \neq 0$, είναι:

$\Delta = (\lambda^2 + 1)^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \neq 0$.

Άρα το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

β) Έχουμε $S = x_1 + x_2 = \dfrac{\lambda^2 + 1}{\lambda}$, $\lambda \neq 0$ και $P = \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1$, $\lambda \neq 0$.

γ) Αν $\lambda > 0$, είναι $S > 0$ και επειδή $P = 1 > 0$ (ρίζες ομόσημες), το τριώνυμο θα έχει θετικές ρίζες.

δ) Με δεδομένο πλέον ότι οι ρίζες είναι θετικές, έχουμε διαδοχικά:

$$\sqrt{x_1x_2} \le \frac{x_1+x_2}{2} \Leftrightarrow x_1x_2 \le \frac{(x_1+x_2)^2}{4} \Leftrightarrow 4x_1x_2 \le (x_1+x_2)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x_1x_2 \le x_1{}^2 + 2x_1x_2 + x_2{}^2 \Leftrightarrow x_1{}^2 - 2x_1x_2 + x_2{}^2 \ge 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \ge 0, \text{ που αληθεύει για κάθε } \lambda > 0$$

Σχόλιο: Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν $x_1 = x_2$. Στην περίπτωση αυτή ισχύει ότι $\Delta = 0$, οπότε προκύπτει $\lambda = 1 > 0$ και η δοθείσα εξίσωση γίνεται $x^2 - 2x + 1 = 0$, άρα $x_1 = x_2 = 1$.

Δ11. α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, $\lambda \ne 0$, είναι:

$\Delta = (\lambda^2+1)^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)^2 \ge 0$

για κάθε $\lambda \ne 0$.

Άρα το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \ne 0$.

β) Έχουμε $S = x_1 + x_2 = \dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$, $\lambda \ne 0$ και $P = \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1$, $\lambda \ne 0$.

γ) Αν $\lambda > 0$, τότε $S > 0$ και επειδή $P = 1 > 0$ (ρίζες ομόσημες), το τριώνυμο θα έχει θετικές ρίζες.

δ) Επειδή $P = 1$, οι ρίζες του τριωνύμου είναι αντίστροφες και καμία δεν είναι μηδέν. Έστω $x_2 = \dfrac{1}{x_1}$. Τότε έχουμε:

$$\frac{x_1+x_2}{2} = \frac{x_1 + \frac{1}{x_1}}{2} = \frac{x_1{}^2+1}{2x_1}$$

Είναι $\dfrac{x_1+x_2}{2} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{x_1{}^2+1}{2x_1} > 1 \Leftrightarrow x_1{}^2 - 2x_1 + 1 > 0 \Leftrightarrow (x_1-1)^2 > 0$,

που αληθεύει για κάθε $0 < \lambda \ne 1$. Επομένως ισχύει $\dfrac{x_1+x_2}{2} > 1$.

Σχόλιο: Για $\lambda = 1$ θα είχαμε $x_1 = x_2 = 1$, δηλαδή θα ήταν $\dfrac{x_1+x_2}{2} = 1$.

Δ12. α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$, $\lambda \ne 0$, είναι:

$\Delta = (\lambda^2+1)^2 - 4\lambda^2 = \lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 - 4\lambda^2 = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2-1)^2 \ge 0$

Άρα το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \neq 0$.

β) Έχουμε $S = x_1 + x_2 = \dfrac{\lambda^2+1}{\lambda}$, $\lambda \neq 0$ και $P = \dfrac{\lambda}{\lambda} = 1$, $\lambda \neq 0$.

γ) **i)** Αν $\lambda < 0$, είναι $S < 0$ και επειδή $P = 1 > 0$ (ρίζες ομόσημες), το τριώνυμο θα έχει αρνητικές ρίζες.

ii) Θα έχουμε διαδοχικά:

$$|x_1 + x_2| \geq 2x_1x_2 \Leftrightarrow |S| \geq 2P \Leftrightarrow \left|\frac{\lambda^2+1}{\lambda}\right| \geq 2 \Leftrightarrow \frac{\lambda^2+1}{|\lambda|} \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |\lambda|^2 + 1 - 2|\lambda| \geq 0 \Leftrightarrow \left(|\lambda| - 1\right)^2 \geq 0, \text{ που αληθεύει για κάθε } \lambda < 0$$

Δ13. α) Για την εξίσωση $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ (1) έχουμε $\Delta = \lambda^2 + 288 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

β) Αφού ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$, έχουμε:

$$2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0 \quad (\mathrm{I})$$

i) Για να είναι ο αριθμός $-\rho$ ρίζα της εξίσωσης $2x^2 - \lambda x - 36 = 0$, θα πρέπει:

$$2\cdot(-\rho)^2 - \lambda\cdot(-\rho) - 36 = 0 \Leftrightarrow 2\rho^2 + \lambda\rho - 36 = 0$$

η οποία αληθεύει λόγω της (I).

ii) Αν $\rho = 0$, τότε η εξίσωση $2x^2 + \lambda x - 36 = 0$ γίνεται $-36 = 0$, που είναι άτοπο. Άρα $\rho \neq 0$.

Για να είναι ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ ρίζα της εξίσωσης $-36x^2 + \lambda x + 2 = 0$, θα πρέπει να είναι:

$$-36\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \lambda\cdot\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow -36\cdot\frac{1}{\rho^2}\cdot\lambda\cdot\frac{1}{\rho} + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -36 + \lambda\rho + 2\rho^2 = 0$$

που αληθεύει λόγω της (I).

Δ14. α) Θέτοντας $x^2 = y \geq 0$ στη διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$, παίρνουμε την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού $y^2 - 8y - 9 = 0$, με ρίζες τις $y_1 = -1$ και $y_2 = 9$.

Έτσι θα είναι $x^2 = -1$, που είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$ και:

$$x^2 = 9 \Leftrightarrow (x = 3 \text{ ή } x = -3)$$

Άρα η δοθείσα εξίσωση έχει μόνο δύο πραγματικές ρίζες, τις $x_1 = 3$ και $x_2 = -3$.

β) i) Θέτοντας $x^2 = y \geq 0$ στη διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$, παίρνουμε την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού $y^2 + \beta y + \gamma = 0$, με:

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0 \text{ για κάθε } \gamma < 0$$

(ως άθροισμα των θετικών όρων β^2 και -4γ).

Άρα η εξίσωση $y^2 + \beta y + \gamma = 0$ έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες.

ii) Αν P το γινόμενο των ριζών y_1, y_2 της εξίσωσης $y^2 + \beta y + \gamma = 0$, θα είναι $P = \gamma < 0$, δηλαδή η εξίσωση $y^2 + \beta y + \gamma = 0$ έχει ρίζες ετερόσημες. Έστω $y_1 > 0$ και $y_2 < 0$. Τότε θα έχουμε:

- $x^2 = y_1 \Leftrightarrow \left(x = \sqrt{y_1} \text{ ή } x = -\sqrt{y_1}\right)$ ή
- $x^2 = y_2 < 0$, που είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.

Άρα η διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές (ετερόσημες) ρίζες.

Δ15. α) Η περίμετρος είναι $\Pi = 2x + 2y = 34 \Leftrightarrow x + y = 17$ (1) (όπου $x, y > 0$ οι διαστάσεις του ορθογωνίου). Ακόμα, από το Πυθαγόρειο θεώρημα, είναι $\delta^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow 13^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 169$ (2).

i) Το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου είναι $E = xy$ σε cm^2.

Από την ταυτότητα $(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy$ έχουμε:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow 17^2 = 169 + 2E \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2E = 120 \Leftrightarrow E = 60 \text{ cm}^2$$

ii) Αν S και P αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των x και y, θα έχουμε $S = x + y = 17$ και $P = xy = 60$. Άρα η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τις x και y είναι:

$$t^2 - St + P = 0 \Leftrightarrow t^2 - 17t + 60 = 0$$

iii) Τα μήκη x, y των πλευρών του ορθογωνίου, θα προκύψουν από τις ρίζες της εξίσωσης $t^2 - 17t + 60 = 0$. Έχουμε $\Delta = 49$ και τελικά βρίσκουμε $t_1 = 12 = x$ και $t_2 = 5 = y$ (ή $y = 12$ και $x = 5$).

β) Εργαζόμαστε όπως στο ερώτημα (α) και έχουμε:

$$E = 40 \Leftrightarrow xy = 40 \Leftrightarrow \rho = 40$$

Επιπλέον είναι $\delta = 8 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 64$, οπότε έχουμε:

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Leftrightarrow (x+y)^2 = 64 + 2xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 = 64 + 80 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 144 \Leftrightarrow x + y = 12 \Leftrightarrow S = 12$$

Άρα η εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ρίζες τις x και y είναι:

$$t^2 - 12t + 40 = 0$$

Επειδή $\Delta = -16 < 0$, η εξίσωση είναι αδύνατη.

Επομένως δεν υπάρχει ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 40 cm^2 και διαγώνιο 8 cm.

Δ16. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι:

$$\Delta = 1 + 4(\lambda^2 - \lambda) = 1 + 4\lambda^2 - 4\lambda = (2\lambda - 1)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

Άρα η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

β) Για να έχει η εξίσωση $x^2 - x + (\lambda - \lambda^2) = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, δύο ρίζες ίσες (μία διπλή ρίζα), θα πρέπει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ)[6] Αν S και P είναι αντίστοιχα το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών x_1 και x_2 της δοθείσας εξίσωσης, τότε έχουμε $S = x_1 + x_2 = 1$ και $P = x_1 x_2 = -(\lambda^2 - \lambda)$. Άρα είναι:

6. Λύνεται ευκολότερα με γνώσεις του $4^{ου}$ κεφαλαίου (όπου θα ξαναλυθεί).

$$A=\frac{1}{\sqrt{S-P}}=\frac{1}{\sqrt{1+(\lambda^2-\lambda)}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\lambda+1}}=\frac{1}{\sqrt{\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}$$

Επειδή ισχύει $\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0, \lambda\in\mathbb{R}$, η παράσταση Α θα έχει νόημα για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$.

Δ17. α) Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\lambda x^2-(\lambda^2+1)x+\lambda,\ \lambda\neq 0$, είναι:

$\Delta=(\lambda^2+1)^2-4\lambda^2=\lambda^4+2\lambda^2+1-4\lambda^2=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda^2-1)^2\geq 0$

Άρα το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες[7].

Επειδή $P=\frac{\lambda}{\lambda}=1>0$ και $S=\frac{\lambda^2+1}{\lambda}>0$ για κάθε $\lambda>0$, το τριώνυμο έχει θετικές ρίζες.

β) i) Το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου παραλληλογράμμου θα είναι $E=xy$, οπου x, y τα μήκη των πλευρών του, που αποτελούν ρίζες της δοθείσας εξίσωσης. Άρα ζητάμε το γινόμενο $P=xy$ των ριζών της δοθείσας εξίσωσης.

Από τους τύπους του Vieta έχουμε $E=P=xy=1$ τ.μ.

ii) Για το άθροισμα S των ριζών x, y έχουμε:

$$S=x+y=\frac{\lambda^2+1}{\lambda},\ \lambda>0$$

Άρα η περίμετρος Π του ορθογωνίου (σε μονάδες μήκους) είναι:

$$\Pi=2(x+y)=2S=2\cdot\frac{\lambda^2+1}{\lambda},\ \lambda>0$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\Pi\geq 4$ για κάθε $\lambda>0$. Έχουμε:

7. Δεν χρειάζεται να βρούμε τις ρίζες.

$$\Pi \geq 4 \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{\lambda^2+1}{\lambda} \geq 4 \Leftrightarrow \lambda^2+1-2\lambda \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \geq 0$$

που αληθεύει για κάθε $\lambda > 0$.

iii) Αν η περίμετρος γίνει ίση με 4, δηλαδή $\Pi = 4 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \lambda = 1$, τότε το τριώνυμο $\lambda x^2 - (\lambda^2+1)x + \lambda$ γίνεται $x^2 - 2x + 1 = 0$, που έχει μία διπλή ρίζα, τη $x = 1$. Άρα οι πλευρές του ορθογωνίου είναι $x = y = 1$ και συμπεραίνουμε ότι πρόκειται για τετράγωνο.

Δ18. α) Το τριώνυμο $x^2 - 6x + \lambda - 7$, $\lambda \in \mathbb{R}$, έχει:

$$\Delta = 36 - 4(\lambda-7) = 36 - 4\lambda + 28 = 64 - 4\lambda$$

Για να έχει το τριώνυμο πραγματικές ρίζες, θα πρέπει να ισχύει:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 64 - 4\lambda \geq 0 \Leftrightarrow 4\lambda \leq 64 \Leftrightarrow \lambda \leq 16$$

β) i) Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 6 \ (1) \text{ και } P = x_1x_2 = \lambda - 7 \ (2)$$

ii) Για $7 < \lambda < 16$ έχουμε $\lambda < 16 \Leftrightarrow \Delta > 0$. Άρα το τριώνυμο έχει δύο άνισες και πραγματικές ρίζες. Επίσης επειδή:

$$\lambda > 7 \Leftrightarrow \lambda - 7 > 0 \Leftrightarrow P > 0$$

συμπεραίνουμε ότι οι ρίζες x_1, x_2 είναι ομόσημες και επειδή $S > 0$, είναι θετικές.

γ) i) Έχουμε $x^2 - 6|x| + \lambda = 7 \Leftrightarrow |x|^2 - 6|x| + \lambda - 7 = 0$ (1). Θέτοντας $|x| = y \geq 0$, θα έχουμε την εξίσωση $y^2 - 6y + \lambda - 7 = 0$ (2), η οποία για $7 < \lambda < 16$ έχει δύο άνισες θετικές πραγματικές ρίζες, έστω $y_1 \neq y_2$. Άρα θα έχουμε:

$$\left(|x| = y_1 \text{ ή } x = -y_2\right) \Leftrightarrow (x = \pm y_1 \text{ ή } x = \pm y_2)$$

Δηλαδή για $7 < \lambda < 16$, η εξίσωση (1) έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις $y_1, -y_1, y_2$ και $-y_2$.

Σχόλιο: Για τις ρίζες y_1 και $-y_2$ ισχύει ότι $y_1 \neq -y_2$, διότι αν $0 < y_1 = -y_2 \Leftrightarrow y_2 < 0$, που είναι άτοπο αφού $y_1, y_2 > 0$. Επίσης η $y = 0$ δεν είναι λύση της εξίσωσης (2), αφού αν ήταν, θα είχαμε $\lambda - 7 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 7$, που είναι άτοπο αφού $7 < \lambda < 16$.

ii) Έχουμε $7 < 3\sqrt{10} < 16 \Leftrightarrow 49 < 90 < 256$ (προφανώς αληθής) και άρα για $\lambda = 3\sqrt{10}$ πληρούνται οι προϋποθέσεις του ερωτήματος (γ)(i), οπότε η εξίσωση $x^2 - 6|x| + \lambda = 7$ έχει τέσσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Δ19. α) Αν θέσουμε $x^2 = y \geq 0$ στη διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 9x^2 + 20 = 0$, παίρνουμε $y^2 - 9y + 20 = 0$, με $\Delta = 1$ και ρίζες τις $y_1 = 4$, $y_2 = 5$. Άρα έχουμε:

$$(x^2 = 4 \text{ ή } x^2 = 5) \Leftrightarrow (x = \pm 2 \text{ ή } x = \pm\sqrt{5})$$

Δηλαδή η δοθείσα εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες, τις $-\sqrt{5}$, -2, 2 και $\sqrt{5}$.

β) Αν στη διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (I) θέσουμε $x^2 = y \geq 0$ θα πάρουμε την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού $y^2 + \beta y + \gamma = 0$ (II). Για να έχει η (I) δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες, θα πρέπει η (II) να έχει δύο πραγματικές ρίζες ετερόσημες, έστω $y_1 > 0$ και $y_2 < 0$ (για τη θετική τιμή της ρίζας, η (I) θα έχει δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες και για την αρνητική τιμή, η (I) θα είναι αδύνατη). Άρα θα πρέπει $\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0$ και $P = \gamma < 0$. Αν λοιπόν επιλέξουμε οποιοδήποτε $\gamma < 0$ και οποιοδήποτε $\beta \in \mathbb{R}$, θα έχουμε το ζητούμενο.

Για παράδειγμα, για $\gamma = -4$ και $\beta = 3$ θα έχουμε τη διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$ (III). Αν θέσουμε $x^2 = y \geq 0$, θα πάρουμε την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού $y^2 + 3y - 4 = 0$, με ρίζες $y_1 = 1$ και $y_2 = -4$. Είναι $x^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 = 1$ και $x_2 = -1)$. Συνεπώς η εξίσωση (III) έχει δύο ρίζες (αφού η $x^2 = -4$ είναι αδύνατη).

Δ20. α) Αν στη διτετράγωνη εξίσωση $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$, θέσουμε $x^2 = y \geq 0$, θα πάρουμε $y^2 - 7y + 12 = 0$, με $\Delta = 1$ και ρίζες τις $y_1 = 3$ και $y_2 = 4$. Άρα θα έχουμε:

- $x^2 = 3 \Leftrightarrow \left(x_1 = \sqrt{3} \text{ και } x_2 = -\sqrt{3}\right)$
- $x^2 = 4 \Leftrightarrow \left(x_3 = 2 \text{ και } x_4 = -2\right)$

Άρα η δοθείσα εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

β) Αν στη διτετράγωνη εξίσωση $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (Ι), θέσουμε $x^2 = y \geq 0$, θα πάρουμε $y^2 + \beta y + \gamma = 0$ (ΙΙ). Αν η εξίσωση (ΙΙ) έχει δύο άνισες θετικές πραγματικές ρίζες, τότε η εξίσωση (Ι) θα έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες. Άρα για τη (ΙΙ) θα πρέπει να ισχύουν τα εξής:

$$\Delta = \beta^2 - 4\gamma > 0,\ P = \gamma > 0 \text{ και } S = -\beta > 0 \Leftrightarrow \beta < 0$$

Οι παραπάνω συνθήκες ικανοποιούνται από τα δεδομένα.

Η (ΙΙ) θα έχει ρίζες τις $y_1, y_2 > 0$ με $y_1 \neq y_2$ και άρα είναι:

- $x^2 = y_1 \Leftrightarrow \left(x_1 = \sqrt{y_1} \text{ και } x_2 = -\sqrt{y_1}\right)$
- $x^2 = y_2 \Leftrightarrow \left(x_3 = \sqrt{y_2} \text{ και } x_4 = -\sqrt{y_2}\right)$

Άρα η δοθείσα εξίσωση έχει τέσσερις διαφορετικές πραγματικές ρίζες.

Δ21. α) Για την εξίσωση $3x^2 - 14x + 8 = 0$ έχουμε $\Delta_1 = 100$ και ρίζες τις $x_1 = 4$ και $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

Για την εξίσωση $8x^2 - 14x + 3 = 0$ έχουμε $\Delta_2 = 100$ και ρίζες τις $x_3 = \dfrac{1}{4}$ και $x_4 = \dfrac{3}{2}$.

β) Αν ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και ισχύει $\rho = 0$, τότε $\gamma = 0$, που είναι άτοπο αφού $\alpha\gamma \neq 0$. Άρα είναι $\rho \neq 0$. Ακόμα, αν ο ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3), θα έχουμε $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$ (Ι). Ο αριθμός $\dfrac{1}{\rho}$ επαληθεύει την εξίσωση $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4) μόνο αν:

$$\gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2+\beta\cdot\frac{1}{\rho}+\alpha=0\Leftrightarrow\frac{\gamma}{\rho^2}+\frac{\beta}{\rho}+\alpha=0\Leftrightarrow\gamma+\beta\rho+\alpha\rho^2=0$$

η οποία αληθεύει λόγω της σχέσης (Ι).

Δ22. α) Για να έχει η εξίσωση $\alpha x^2-5x+\alpha=0$, $\alpha\neq0$, πραγματικές ρίζες, αρκεί:

$$\Delta\geq0\Leftrightarrow25-4\alpha^2\geq0\Leftrightarrow4\alpha^2\leq25\Leftrightarrow\alpha^2\leq\frac{25}{4}\Leftrightarrow|\alpha|\leq\frac{5}{2}$$

Αν x_1 και x_2 οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης, τότε $P=x_1x_2=\dfrac{\alpha}{\alpha}=1$

και άρα οι ρίζες αυτές είναι αντίστροφοι αριθμοί.

β) Για $\alpha=2$ η εξίσωση γίνεται $2x^2-5x+2=0$, η οποία έχει $\Delta=9$ και ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=\dfrac{1}{2}$.

γ) Αν στην εξίσωση $2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-5\left(x+\dfrac{1}{2}\right)+2=0$, με $x\neq0$, θέσουμε $x+\dfrac{1}{x}=y$, θα έχουμε $2y^2-5y+2=0$.

Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τις $y_1=2$ και $y_2=\dfrac{1}{2}$. Άρα:

- $x+\dfrac{1}{x}=2\Leftrightarrow x^2-2x+1=0\Leftrightarrow x=1$
- $x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2-x+2=0$, αδύνατη αφού $\Delta_1=-15<0$

Δ23. α) Έχουμε ισοδύναμα:

$$(x-2)^2=\lambda(4x-3)\Leftrightarrow x^2-4x+4=4\lambda x-3\lambda\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4-4\lambda x+3\lambda=0\Leftrightarrow x^2-4(\lambda+1)x+3\lambda+4=0$$

Η παραπάνω εξίσωση είναι στη ζητούμενη μορφή με:

$$\alpha=1\neq0,\ \beta=-4(\lambda+1)\ \text{και}\ \gamma=3\lambda+4$$

β)[8] Η παραπάνω εξίσωση έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = \left[-4(\lambda+1)\right]^2 - 4(3\lambda+4) = 16(\lambda+1)^2 - 12\lambda - 16 =$$
$$= 16(\lambda^2+2\lambda+1) - 12\lambda - 16 = 16\lambda^2 + 20\lambda$$

Για να έχει πραγματικές και άνισες ρίζες, αρκεί:

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 16\lambda^2 + 20\lambda > 0 \Leftrightarrow 4\lambda(4\lambda+5) > 0$$

Δηλαδή αρκεί οι αριθμοί λ και $(4\lambda+5)$ να είναι ομόσημοι, οπότε βρίσκουμε $\lambda > 0$ ή $\lambda < -\frac{5}{4}$.

γ) **i)** Έχουμε $S = 4(\lambda+1)$ και $P = 4 + 3\lambda$.

ii) Έχουμε διαδοχικά:

$$A = (4x_1 - 3)(4x_2 - 3) = 16x_1x_2 - 12x_1 - 12x_2 + 9 =$$
$$= 16x_1x_2 - 12(x_1 + x_2) + 9 = 16P - 12S + 9 =$$
$$= 16(4+3\lambda) - 12\cdot 4(\lambda+1) + 9 = 64 + 48\lambda - 48\lambda - 48 + 9 = 25$$

Άρα η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή.

Δ24. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2 - \lambda x - (\lambda^2 + 5) = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$, είναι:

$$\Delta = \lambda^2 + 4(\lambda^2+5) = 5\lambda^2 + 20 = 5(\lambda^2+4),\ \lambda \in \mathbb{R}$$

β) Έχουμε $\Delta = 5(\lambda^2+4) > 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$ (ως άθροισμα θετικών όρων), άρα η δοθείσα εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

γ) Αν S και P είναι το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών x_1 και x_2 της εξίσωσης, σύμφωνα με τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = \lambda \ \text{(I)} \ \text{και} \ P = x_1x_2 = -(\lambda^2+5) \ \text{(II)}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$(x_1-2)(x_2-2) = -4 \Leftrightarrow x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4 = -4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_1x_2 - 2(x_1+x_2) + 8 = 0 \Leftrightarrow P - 2S + 8 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -(\lambda^2+5) - 2\lambda + 8 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

Οι ρίζες της τελευταίας εξίσωσης είναι $\lambda = 1$ ή $\lambda = -3$. Άρα οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η σχέση $(x_1-2)(x_2-2) = -4$ είναι $\lambda = 1$ ή $\lambda = -3$.

8. Το ερώτημα αυτό λύνεται ευκολότερα στο 4ο κεφάλαιο με το πρόσημο τριωνύμου.

Δ25. α) Η εξίσωση $x^2-3x-4=0$ (1) έχει διακρίνουσα $\Delta=25$ και ρίζες $x_{1,2}=\dfrac{3\pm5}{2}$, δηλαδή $x_1=4$ και $x_2=-1$.

β) Για να είναι ο αριθμός $\dfrac{\alpha}{\beta}$ ρίζα της εξίσωσης (1), αρκεί να την επαληθεύει. Δηλαδή αρκεί να ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-3\cdot\frac{\alpha}{\beta}-4=0\Leftrightarrow\frac{\alpha^2}{\beta^2}-3\cdot\frac{\alpha}{\beta}-4=0\Leftrightarrow\alpha^2-3\alpha\beta-4\beta^2=0$$

η οποία αληθεύει, αφού είναι η δεδομένη σχέση.

γ) Αφού ο αριθμός $\dfrac{\alpha}{\beta}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (1), ισχύει ότι:

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}=4 \text{ ή } \frac{\alpha}{\beta}=-1\right)\Leftrightarrow(\alpha=4\beta \text{ ή } \alpha=-\beta)$$

Η περίπτωση $\alpha=-\beta$ απορρίπτεται, διότι οι αριθμοί α και β δίνεται ότι είναι ομόσημοι. Άρα $\alpha=4\beta$, δηλαδή ο α είναι τετραπλάσιος του β.

Δ26. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$, είναι:

$$\Delta=1-4(\lambda-\lambda^2)=4\lambda^2-4\lambda+1=(2\lambda-1)^2\geq0 \text{ για κάθε } \lambda\in\mathbb{R}$$

Άρα η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

β) Για να έχει η εξίσωση $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0, \lambda\in\mathbb{R}$, δύο ρίζες ίσες (μία διπλή ρίζα), θα πρέπει να ισχύει:

$$\Delta=0\Leftrightarrow(2\lambda-1)^2=0\Leftrightarrow2\lambda-1=0\Leftrightarrow\lambda=\frac{1}{2}$$

γ) Οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-x+\lambda-\lambda^2=0, \lambda\in\mathbb{R}$, είναι:

$$x_{1,2}=\frac{1\pm(2\lambda-1)}{2}, \text{ δηλαδή}$$

$$x_1=\frac{1+2\lambda-1}{2}=\lambda \text{ και } x_2=\frac{1-2\lambda+1}{2}=\frac{2(1-\lambda)}{2}=1-\lambda$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$0 < d(x_1, x_2) < 2 \Leftrightarrow 0 < |x_1 - x_2| < 2 \Leftrightarrow 0 < |\lambda - (1-\lambda)| < 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 0 < |2\lambda - 1| < 2 \Leftrightarrow \left(|2\lambda - 1| > 0 \text{ και } |2\lambda - 1| < 2\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\lambda \neq \frac{1}{2} \text{ και } -2 < 2\lambda - 1 < 2\right) \Leftrightarrow -1 < 2\lambda < 3 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \lambda < \frac{3}{2}$$

Άρα οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει $0 < d(x_1, x_2) < 2$, είναι:

$$\lambda \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Δ27. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι:

$$\Delta = 1 - 4(\lambda - \lambda^2) = 4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = (2\lambda - 1)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

Άρα η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

β) Για να έχει η εξίσωση $x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, δύο ρίζες ίσες (μία διπλή ρίζα), αρκεί να ισχύει:

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow (2\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$$

γ) Για $\lambda \neq \frac{1}{2}$ έχουμε διαδοχικά:

$$d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)} \Leftrightarrow |x_1 - x_2| = \frac{1}{|x_1 - x_2|} \Leftrightarrow |x_1 - x_2|^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow |x_1 - x_2| = 1 \Leftrightarrow |\lambda - (1-\lambda)| = 1 \Leftrightarrow |2\lambda - 1| = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\lambda - 1 = 1 \text{ ή } 2\lambda - 1 = -1) \Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 0)$$

Συνεπώς οι τιμές του λ για τις οποίες ισχύει $d(x_1, x_2) = \frac{1}{d(x_1, x_2)}$ είναι $\lambda = 1$ ή $\lambda = 0$.

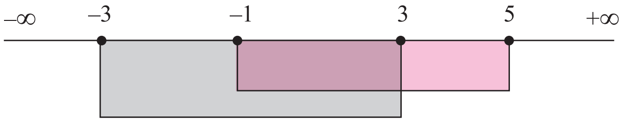
Δ28. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι: $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4(\lambda^2 - 1) = 4\lambda^2 - 4\lambda^2 + 4 = 4 > 0$, οπότε η δοθείσα εξίσωση έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

β) Οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι $x_{1,2} = \frac{2\lambda \pm 2}{2}$, δηλαδή $x_1 = \lambda + 1$ και $x_2 = \lambda - 1$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

γ) Θα πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα:

- $\lambda+1\in(-2,4)\Leftrightarrow -2<\lambda+1<4\Leftrightarrow -3<\lambda<3$ και
- $\lambda-1\in(-2,4)\Leftrightarrow -2<\lambda-1<4\Leftrightarrow -1<\lambda<5$

Οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων είναι $\lambda\in(-1,3)$, όπως απεικονίζεται παρακάτω.



Δ29. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $\alpha x^2-(\alpha^2-1)x-\alpha=0,\ \alpha\neq 0\ (1)$ είναι:

$$\Delta=\left[-(\alpha^2-1)\right]^2+4\alpha^2=(\alpha^2-1)^2+4\alpha^2=\alpha^4-2\alpha^2+1+4\alpha^2=$$
$$=\alpha^4+2\alpha^2+1=(\alpha^2+1)^2$$

β) Επειδή $\Delta=(\alpha^2+1)^2>0$ για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$, η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες.

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$\rho_{1,2}=\frac{(\alpha^2-1)\pm(\alpha^2+1)}{2\alpha},\ \text{δηλαδή}$$

$$\rho_1=\frac{\alpha^2-1+\alpha^2+1}{2\alpha}=\alpha\ \text{και}\ \rho_2=\frac{\alpha^2-1-\alpha^2-1}{2\alpha}=-\frac{1}{\alpha}$$

γ) Έχουμε διαδοχικά:

$$|\rho_1-\rho_2|=2\Leftrightarrow\left|\alpha+\frac{1}{\alpha}\right|=2\Leftrightarrow\left|\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right|=2\Leftrightarrow\alpha^2+1=|2\alpha|$$

- $\alpha^2+1=2\alpha\Leftrightarrow\alpha^2-2\alpha+1=0\Leftrightarrow(\alpha-1)^2=0\Leftrightarrow\alpha=1$
- $\alpha^2+1=-2\alpha\Leftrightarrow\alpha^2+2\alpha+1=0\Leftrightarrow(\alpha+1)^2=0\Leftrightarrow\alpha=-1$

Δ30. α) Η εξίσωση $x^2-2x+\lambda=0,\ \lambda<1$, έχει διακρίνουσα:

$$\Delta=4-4\lambda=4(1-\lambda)>0,\ \text{αφού}\ \lambda<1\Leftrightarrow 1-\lambda>0$$

Άρα έχει δύο πραγματικές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους.

β) Από τον τύπο του Vieta έχουμε $S=x_1+x_2=-\dfrac{-2}{1}\Leftrightarrow x_1+x_2=2.$

γ) i) Έχουμε διαδοχικά:

$$|x_1-2|=|x_2+2| \Leftrightarrow (x_1-2=x_2+2 \text{ ή } x_1-2=-x_2-2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x_1-x_2=4 \text{ ή } x_1+x_2=0)$$

Όμως $x_1+x_2=0$ δεν ισχύει, αφού $x_1+x_2=2$. Άρα $x_1-x_2=4$.

ii) Έχουμε τις σχέσεις $x_1+x_2=2$ (1) και $x_1-x_2=4$ (2). Με πρόσθεση των (1) και (2) κατά μέλη έχουμε $2x_1=6 \Leftrightarrow x_1=3$.

Αντικαθιστούμε στην (1) το x_1 με 3 και έχουμε:

$$3+x_2=2 \Leftrightarrow x_2=-1$$

Άρα οι ρίζες της δοθείσας εξίσωσης είναι $x_1=3$ και $x_2=-1$.

Τέλος, για την εύρεση της τιμής του λ έχουμε:

$$P=x_1x_2 \Leftrightarrow \lambda=3\cdot(-1) \Leftrightarrow \lambda=-3$$

που είναι δεκτή, αφού $\lambda=-3<1$.

Δ31. α) Το σημείο Δ (σπίτι της Δήμητρας) θα βρίσκεται στο μέσο των σημείων Α και Β, αφού ισαπέχει από αυτά. Πράγματι είναι:

$$|s_\Delta-s_A|=|s_\Delta-s_B| \Leftrightarrow d(s_\Delta,s_A)=d(s_\Delta,s_B)$$

Αυτό αποδεικνύεται και αλγεβρικά, αφού:

$$|s_\Delta-s_A|=|s_\Delta-s_B| \Leftrightarrow \left(s_\Delta-s_A=s_\Delta-s_B \text{ ή } s_\Delta-s_A=-(s_\Delta-s_B)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(s_A=s_B \text{ (απορρίπτεται) ή } 2s_\Delta=s_A+s_B\right) \Leftrightarrow s_\Delta=\frac{s_A+s_B}{2}$$

Επίσης, το σημείο Γ (σπίτι του Γιώργου) βρίσκεται στο μέσο των σημείων Δ και Β. Πράγματι είναι:

- $|s_\Gamma-s_\Delta|=\left|\frac{s_A+3s_B}{4}-\frac{s_A+s_B}{2}\right|=\left|\frac{s_B-s_A}{4}\right|=\left|\frac{s_A-s_B}{4}\right|$ και
- $|s_\Gamma-s_B|=\left|\frac{s_A+3s_B}{4}-s_B\right|=\left|\frac{s_A-s_B}{4}\right|$

Συνεπώς ισχύει ότι:

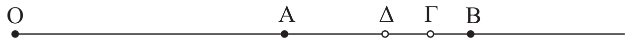
$$|s_\Gamma-s_\Delta|=|s_\Gamma-s_B| \Leftrightarrow d(s_\Gamma,\ s_\Delta)=d(s_\Gamma,\ s_B)$$

ή αλλιώς:

$$|s_\Gamma-s_\Delta|=|s_\Gamma-s_B| \Leftrightarrow \left(s_\Gamma-s_\Delta=s_\Gamma-s_B \text{ ή } s_\Gamma-s_\Delta=-(s_\Gamma-s_B)\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(s_B=s_B \text{ (απορρίπτεται) ή } 2s_\Gamma=s_\Delta+s_B\right) \Leftrightarrow s_\Gamma=\frac{s_\Delta+s_B}{2}$$

Άρα τα σημεία Γ και Δ, που παριστάνουν τις θέσεις των σπιτιών του Γιώργου και της Δήμητρας αντίστοιχα, έχουν την παρακάτω διάταξη πάνω στον άξονα:



β) i) Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε $S = s_A + s_B = 1{,}4$ και $P = s_A s_B = 0{,}45$, όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των s_A, s_B. Άρα η ζητούμενη εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού, που έχει ρίζες τις s_A, s_B είναι:

$$s^2 - S\cdot s + P = 0 \Leftrightarrow s^2 - 1{,}4s + 0{,}45 = 0$$

ii) Τα s_A, s_B αποτελούν τις ρίζες της εξίσωσης $s^2 - 1{,}4s + 0{,}45 = 0$ με $s_A < s_B$. Άρα έχουμε $\Delta = 0{,}16$, $s_A = 0{,}5$ και $s_B = 0{,}9$. Τώρα έχουμε $s_\Gamma = \dfrac{s_A + 3s_B}{4} = 0{,}8$ και $s_\Delta = \dfrac{s_A + s_B}{2} = 0{,}7$.

Άρα $s_A = 0{,}5$, $s_B = 0{,}9$, $s_\Gamma = 0{,}8$ και $s_\Delta = 0{,}7$.

Δ32. α) Η διακρίνουσα της εξίσωσης $x^2 - 5\lambda x - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι:

$$\Delta = (-5\lambda)^2 + 4 = 25\lambda^2 + 4 > 0 \text{ για κάθε } \lambda \in \mathbb{R}$$

Άρα η δοθείσα εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) i) Από τους τύπους του Vieta είναι:

$$S = x_1 + x_2 = 5\lambda \text{ και } P = x_1 x_2 = -1$$

Έχουμε διαδοχικά:

$(x_1 + x_2)^2 - 18 - 7(x_1 x_2)^{24} = 0 \Leftrightarrow S^2 - 18 - 7P^{24} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25\lambda^2 - 18 - 7\cdot(-1)^{24} = 0 \Leftrightarrow 25\lambda^2 - 18 - 7 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 25\lambda^2 - 25 = 0 \Leftrightarrow 25\lambda^2 = 25 \Leftrightarrow \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow (\lambda = 1 \text{ ή } \lambda = -1)$

ii) Για $\lambda = 1$ είναι $S = 5$ (1) και $P = -1$ (2). Η δοσμένη παράσταση γράφεται ως εξής:

$A = x_1{}^2 x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1 x_2{}^2 =$

$= x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 3(x_1 + x_2) + 4 =$

$= (x_1 + x_2)(x_1 x_2 - 3) + 4 = S\cdot(P - 3) + 4$

Λαμβάνοντας υπόψη τις (1) και (2) έχουμε:

$$A = 5\cdot(-1-3)+4 = -20+4 = -16$$

Άρα για $\lambda = 1$ είναι $A = x_1{}^2x_2 - 3x_1 + 4 - 3x_2 + x_1x_2{}^2 = -16.$

Δ33. Από τους τύπους του Vieta για την εξίσωση $x^2 - 4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0$ (1), με $\lambda \in (0,4)$, έχουμε:

$$S = x_1 + x_2 = 4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right) \text{ και } P = x_1x_2 = 16$$

όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών x_1 και x_2 της εξίσωσης (1).

α) i) Η περίμετρος Π του ορθογωνίου (σε μονάδες μήκους) είναι:

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1+x_2) = 2S = 8\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right),\ \lambda \in (0,4)$$

ii) Το Εμβαδόν Ε του ορθογωνίου (σε τετραγωνικές μονάδες) είναι $E = x_1x_2 = 16$.

β) Έχουμε:

$$\Pi \geq 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right) \geq 16 \Leftrightarrow \lambda+\frac{1}{\lambda} \geq 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 \geq 0$$

η οποία είναι προφανώς αληθής για κάθε $\lambda \in (0,4)$.

γ) Έχουμε:

$$\Pi = 16 \Leftrightarrow 8\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right) = 16 \Leftrightarrow \lambda+\frac{1}{\lambda} = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1 \in (0,4)$ η δοθείσα εξίσωση (1) γίνεται $x^2 - 8x + 16 = 0$, που έχει διπλή ρίζα τη $x_1 = x_2 = 4$. Άρα οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 4 μονάδες μήκους. Συνεπώς πρόκειται για τετράγωνο πλευράς $\alpha = 4$.

Σχόλιο: Η εξίσωση $x^2 - 4\left(\lambda+\frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0$ (1) με $\lambda \in (0,4)$ έχει διακρίνουσα:

$$\Delta = 16\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - 64 = 16\left[\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)^2 - 4\right] = 16\left(\lambda^2 + 2 + \frac{1}{\lambda^2} - 4\right) =$$

$$= 16\left(\lambda^2 - 2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) = 16\left(\lambda - \frac{1}{\lambda}\right)^2 \geq 0$$

οπότε έχει πραγματικές ρίζες. Επίσης, επειδή οι ρίζες αυτές είναι διαστάσεις του ορθογωνίου, απαιτείται να είναι θετικές, δηλαδή να ισχύουν οι σχέσεις $S = 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) > 0$, που ισχύει για $\lambda \in (0, 4)$, και $P = 16 > 0$, που αληθεύει. Δεν χρειάζεται βέβαια να διερευνηθεί στη λύση της άσκησης αυτό το σημείο, αφού αποτελεί σιωπηρό δεδομένο της άσκησης για να είναι ορθή η εκφώνηση.

Δ34. Από τους τύπους του Vieta για την εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda(2-\lambda) = 0$ (1), με $\lambda \in (0,2)$, έχουμε $S = x_1 + x_2 = 2$ και $P = x_1 x_2 = \lambda(2-\lambda)$, με $\lambda \in (0,2)$, όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο αντίστοιχα των ριζών x_1 και x_2 της εξίσωσης (1).

α) i) Η περίμετρος Π του ορθογωνίου (σε μονάδες μήκους) είναι:

$$\Pi = 2x_1 + 2x_2 = 2(x_1 + x_2) = 2S = 4$$

ii) Το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου (σε τετραγωνικές μονάδες) είναι $E = x_1 x_2 = P = \lambda(2-\lambda)$, με $\lambda \in (0,2)$.

β) Έχουμε:

$$E \leq 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) \leq 1 \Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 \leq 1 \Leftrightarrow -\lambda^2 + 2\lambda - 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 \geq 0$$

η οποία είναι προφανώς αληθής για κάθε $\lambda \in (0,2)$.

γ) Έχουμε:

$$E = 1 \Leftrightarrow \lambda(2-\lambda) = 1 \Leftrightarrow 2\lambda - \lambda^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$$

Για $\lambda = 1 \in (0,2)$, η δοθείσα εξίσωση (1) γίνεται $x^2 - 2x + 1 = 0$, που έχει διπλή ρίζα, τη $x_1 = x_2 = 1$. Άρα οι διαστάσεις του ορθογωνίου είναι 1 μονάδα μήκους, συνεπώς πρόκειται για τετράγωνο πλευράς $\alpha = 1$.

Σχόλιο: Η εξίσωση $x^2-2x+\lambda(2-\lambda)=0$ (1) με $\lambda\in(0,2)$ έχει διακρίνουσα $\Delta=4-4\lambda(2-\lambda)=4-8\lambda+4\lambda^2=(2\lambda-2)^2\geq 0$, οπότε έχει πραγματικές ρίζες. Επίσης, επειδή οι ρίζες αυτές είναι διαστάσεις του ορθογωνίου απαιτείται να είναι θετικές, δηλαδή να ισχύουν οι σχέσεις $P=x_1x_2=\lambda(2-\lambda)>0$, που ισχύει για $\lambda\in(0,2)$, και $S=x_1+x_2=2>0$, που αληθεύει. Δεν χρειάζεται βέβαια να διερευνηθεί στη λύση της άσκησης αυτό το σημείο, αφού αποτελεί σιωπηρό δεδομένο της άσκησης για να είναι ορθή η εκφώνηση.

Δ35. α) Έχουμε $x+y=10\Leftrightarrow y=10-x$ (όπου $y>0\Leftrightarrow 10-x>0\Leftrightarrow x<10$).

Άρα είναι[9] $E(x)=\frac{1}{2}\cdot xy=\frac{1}{2}\cdot x(10-x)=\frac{1}{2}(-x^2+10x),\ x\in(0,10)$.

β) Έχουμε διαδοχικά και ισοδύναμα:

$$E(x)\leq\frac{25}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(-x^2+10x)\leq\frac{25}{2}\Leftrightarrow -x^2+10x-25\leq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -(x^2-10x+25)\leq 0\Leftrightarrow -(x-5)^2\leq 0$$

η οποία είναι προφανώς αληθής για κάθε $x\in(0,10)$.

γ) Έχουμε:

$$E(x)=\frac{25}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}(-x^2+10x)=\frac{25}{2}\Leftrightarrow -x^2+10x-25=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-10x+25=0\Leftrightarrow(x-5)^2=0\Leftrightarrow x=5$$

Άρα το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ γίνεται μέγιστο όταν $x=5$ και $y=5$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Δ36. α) Αν x, y cm οι διαστάσεις του ορθογωνίου που περιγράφεται στην άσκηση, είναι $x, y>0$ και επιπλέον ισχύει:

$$\Pi=40\Leftrightarrow 2x+2y=40\Leftrightarrow x+y=20\Leftrightarrow y=20-x$$

όπου $y>0\Leftrightarrow 20-x>0\Leftrightarrow x<20$. Άρα τελικά $0<x<20$.

---

9. Το εμβαδόν ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές α, β είναι $E=\frac{1}{2}\cdot\alpha\beta$.

β) Αν Ε το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E = E(x) = xy = x(20 - x) = (20x - x^2)\ \text{cm}^2$$

γ) Για κάθε $x \in (0, 20)$ θα έχουμε:

$$E(x) \le 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 \le 100 \Leftrightarrow -x^2 + 20x - 100 \le 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 \ge 0 \Leftrightarrow (x-10)^2 \ge 0$$

η οποία είναι αληθής για $x \in (0, 20)$.

δ) Για όλα τα ορθογώνια με περίμετρο Π = 40 cm και εμβαδόν $E(x)$ ισχύει $E(x) \le 100$, με $x \in (0, 20)$ (από το ερώτημα (γ)). Άρα για όλα αυτά τα ορθογώνια το μέγιστο εμβαδόν θα είναι:

$$E(x) = 100 \Leftrightarrow 20x - x^2 = 100 \Leftrightarrow x^2 - 20x + 100 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-10)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 10\ \text{cm}$$

Αν $x = 10$, τότε $y = 20 - 10 = 10$. Άρα $x = y = 10$ cm και έτσι το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο Π = 40 cm και μέγιστο εμβαδόν είναι το τετράγωνο με πλευρά $\alpha = 10$ cm.

Δ37. α) i) Έχουμε:

$$|t_A - t_\Delta| = |t_B - t_\Delta| \Leftrightarrow \left(t_A - t_\Delta = t_B - t_\Delta \text{ ή } t_A - t_\Delta = -(t_B - t_\Delta)\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(t_A = t_B \text{ (απορρίπτεται αφού } t_A < t_B) \text{ ή } t_A - t_\Delta = -t_B + t_\Delta\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2}$$

ii) Θα συγκρίνουμε μεταξύ τους όλους τους χρόνους t_A, t_B, t_Γ, t_Δ βρίσκοντας τις διαφορές τους ανά δύο. Έχουμε:

$$t_\Gamma - t_A = \frac{t_A + 2t_B}{3} - t_A = \frac{t_A + 2t_B - 3t_A}{3} = 2 \cdot \frac{t_B - t_A}{3} > 0 \Rightarrow t_\Gamma > t_A$$

$$t_\Gamma - t_B = \frac{t_A + 2t_B}{3} - t_B = \frac{t_A + 2t_B - 3t_B}{3} = \frac{t_A - t_B}{3} < 0 \Rightarrow t_\Gamma < t_B$$

$$t_\Delta - t_B = \frac{t_A + t_B}{2} - t_B = \frac{t_A - t_B}{2} < 0 \Rightarrow t_\Delta < t_B$$

$$t_\Delta - t_A = \frac{t_A + t_B}{2} - t_A = \frac{t_B - t_A}{2} > 0 \Rightarrow t_\Delta > t_A$$

$$t_\Delta - t_\Gamma = \frac{t_A + t_B}{2} - \frac{t_A + 2t_B}{2} = \frac{t_A - t_B}{6} < 0 \Rightarrow t_\Delta < t_\Gamma$$

Άρα η διάταξη είναι $t_A < t_\Delta < t_\Gamma < t_B$.

β) i) Έχουμε $S = t_A + t_B = 6$ και $P = t_A t_B = 8$, οπότε η εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τις t_A και t_B είναι:

$$t^2 - St + P = 0 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 8 = 0,\ t > 0\ (\mathrm{I})$$

ii) Από τη λύση της (Ι) προκύπτει ότι $t = 4$ ή $t = 2$. Επειδή $t_A < t_B$, είναι $t_A = 2$ και $t_B = 4$, οπότε $t_\Gamma = \frac{t_A + 2t_B}{3} = \frac{2 + 2\cdot 4}{3} = \frac{10}{3}$ και $t_\Delta = \frac{t_A + t_B}{2} = \frac{2+4}{2} = 3$.

Δ38. α) Το κάθε πλακάκι τύπου Α θα έχει εμβαδόν $E_A = d^2\ cm^2$, ενώ το κάθε πλακάκι τύπου Β θα έχει εμβαδόν $E_B = (d+1)^2\ cm^2$.

β) i) Αφού την επιφάνεια μπορούμε να την καλύψουμε είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, έχουμε διαδοχικά:

$$200E_A = 128E_B \Leftrightarrow 200d^2 = 128(d+1)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 200d^2 = 128(d^2 + 2d + 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 200d^2 = 128d^2 + 256d + 128 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 72d^2 - 256d - 128 = 0 \Leftrightarrow 9d^2 - 32d - 16 = 0\ (\mathrm{I})$$

Η εξίσωση (Ι) έχει διακρίνουσα $\Delta = 1600$ και λύσεις τις:

$$d_1 = -\frac{1}{3} < 0 \text{ (απορρίπτεται) και } d_2 = 4, \text{ που είναι δεκτή.}$$

Άρα $d = 4$. Συνεπώς το πλακάκι τύπου Α έχει πλευρά 4 cm και το πλακάκι τύπου Β έχει πλευρά 5 cm.

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν τα πλακάκια είναι:

$$200d^2 = 200\cdot 4^2 = 3200\ cm^2$$
$$(\text{ή ομοίως } 128(d+1)^2 = 128\cdot 5^2 = 3200\ cm^2)$$

Δ39. α) Έχουμε $h(0) = 1{,}05$ m, $h(1) = 6{,}05$ m και $h(2) = 1{,}05$ m.
Αυτό σημαίνει ότι η αρχική θέση της μπάλας (δηλαδή το σημείο εκτόξευσης) είναι σε ύψος 1,05 m.
Μετά από χρόνο 1 s η μπάλα βρίσκεται σε ύψος 6,05m από το έδαφος.

Μετά από χρόνο 2 s η μπάλα επανέρχεται στην αρχική της θέση (δηλαδή στο σημείο εκτόξευσης).

β) Όταν η μπάλα θα φθάσει στο έδαφος, το ύψος θα είναι ίσο με μηδέν. Άρα έχουμε:

$$h(t)=0 \Leftrightarrow -5t^2+10t+1,05=0$$

Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι $\Delta = 121$.

Τελικά προκύπτει ότι $t=2,1s$ (η τιμή $t=-0,1$ απορρίπτεται).

γ) Έχουμε διαδοχικά:

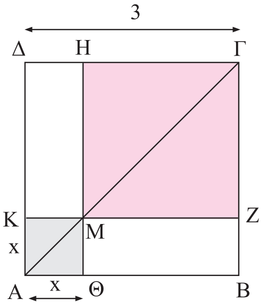
$h(t)=-5t^2+10t+1,05=5(-t^2+2t+0,21)=5(-t^2+2t+1,21-1)=$
$=5\left[-(t^2-2t+1)+1,21\right]=5\left[1,21-(t-1)^2\right]$

δ) Θα πρέπει να είναι:

$h(t)\geq 6,65 \Leftrightarrow 5\left[1,21-(t-1)^2\right]\geq 6,65 \Leftrightarrow -5(t-1)^2\geq 6,65-6,05 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -5(t-1)^2\geq 0,60 \Leftrightarrow (t-1)^2\leq -0,12$

Όμως η τελευταία ανίσωση είναι αδύνατη, άρα δεν υπάρχει χρονική στιγμή που το ύψος h της μπάλας θα είναι πάνω από 6,65 m.

Δ40. α) Η πλευρά του τετραγώνου ΑΚΜΘ έχει μήκος x, ενώ η πλευρά του τεραγώνου ΗΓΖΜ έχει μήκος (3 – x). Έτσι έχουμε τους φυσικούς περιορισμούς $x>0$ και $3-x>0 \Leftrightarrow x<3$, δηλαδή $0<x<3$.



Το συνολικό εμβαδόν Ε των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος θα είναι:

$E=E_{ΑΚΜΘ}+E_{ΗΓΖΜ}=x^2+(3-x)^2=x^2+9-6x+x^2=$
$=2x^2-6x+9,\ x\in(0,\ 3)$

β) Έχουμε:

$$E \geq \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2E \geq 9 \Leftrightarrow 2(2x^2 - 6x + 9) \geq 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (2x-3)^2 \geq 0$, η οποία είναι αληθής για κάθε $x \in (0, 3)$

γ) Το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο στη θέση του σημείου Μ όπου ισχύει:

$$E = \frac{9}{2} \Leftrightarrow 2E = 9 \Leftrightarrow 2(2x^2 - 6x + 9) = 9 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Για να βρούμε τη θέση του σημείου Μ πάνω στη διαγώνιο ΑΓ, θα πρέπει να υπολογίσουμε αρχικά το μήκος της. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, έχουμε διαδοχικά:

$$A\Gamma^2 = 3^2 + 3^2 \Leftrightarrow A\Gamma^2 = 18 \Leftrightarrow A\Gamma = 3\sqrt{2}$$

Η διαγώνιος του τεραγώνου ΑΘΜΚ από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΘΜ είναι:

$$AM^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Leftrightarrow AM^2 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow AM = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$$

Άρα το συνολικό εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων του σχήματος γίνεται ελάχιστο, όταν το Μ είναι μέσο της διαγωνίου ΑΓ του τετραγώνου ΑΒΓΔ.

Δ41. α) Πρέπει $y = 0{,}43x - 26 > 0 \Leftrightarrow 0{,}43x > 26 \Leftrightarrow x > \frac{2600}{43}$ (για τις γυναίκες) και $y = 0{,}45x - 31 > 0 \Leftrightarrow 0{,}45x > 31 \Leftrightarrow x > \frac{3100}{45}$ (για τους άντρες). Έχουμε:

$$38{,}50 = 0{,}43x - 26 \Leftrightarrow 0{,}43x = 64{,}5 \Leftrightarrow x = 150$$

οπότε το ύψος της γυναίκας είναι 150 cm.

β) Αν το μηριαίο οστό και τα οστά του χεριού ανήκουν στον ίδιο άντρα, οι τιμές $x = 164$ και $y = 42{,}8$ θα επαληθεύουν τη σχέση $y = 0{,}45x - 31$. Είναι:

$42,8 = 0,45 \cdot 164 - 31 \Leftrightarrow 42,8 = 42,8$, που είναι προφανώς αληθής

Άρα το μηριαίο οστό και τα οστά του χεριού προέρχονται από το ίδιο άτομο.

γ) Αν ένας άντρας και μια γυναίκα ίδιου ύψους έχουν μηριαίο οστό ίδιου μήκους, θα ισχύει:

$$0,43x - 26 = 0,45x - 31 \Leftrightarrow 0,02x = 5 \Leftrightarrow x = 250$$

Άρα πρέπει να έχουν ύψος 2,5 μέτρα, που λογικά είναι αδύνατο.

Απαντήσεις και λύσεις
Διαγωνισμάτων

Διαγώνισμα 1

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σωστό. **β)** Λάθος. **γ)** Σωστό.

δ) Λάθος. **ε)** Σωστό.

Α2. Απόδειξη της πρότασης 7.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο Θέμα Β16.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο Θέμα Γ8.

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο Θέμα Δ21.

Διαγώνισμα 2

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σωστό. **β)** Σωστό. **γ)** Λάθος.

δ) Το Α. **ε)** Το Β.

Α2. Απόδειξη της πρότασης 1.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο Θέμα Β26.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο Θέμα Γ13.

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο Θέμα Δ10.

Απαντήσεις και λύσεις
στα επαναληπτικά διαγωνίσματα

Επαναληπτικό 1

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Λάθος. **β)** Σωστό. **γ)** Λάθος.

δ) Λάθος. **ε)** Σωστό.

Α2. Απόδειξη της πρότασης 2 στο Κεφάλαιο 2ο.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο Θέμα Β7 στο Κεφάλαιο 1ο.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο Θέμα Γ9 στο Κεφάλαιο 2ο.

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο Θέμα Δ18 στο Κεφάλαιο 3ο.

Επαναληπτικό 2

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Σωστό. **β)** Λάθος. **γ)** Σωστό.

δ)

1	2	3
γ	α	δ

ε)

1	2	3
β	δ	γ

Α2. Απόδειξη της πρότασης 4 στο Κεφάλαιο 3ο.

ΘΕΜΑ Β

Δες τη λύση στο θέμα Β26 στο Κεφάλαιο 2ο.

ΘΕΜΑ Γ

Δες τη λύση στο θέμα Γ11 στο Κεφάλαιο 3ο.

ΘΕΜΑ Δ

Δες τη λύση στο θέμα Δ15 στο Κεφάλαιο 3ο.